

Ejercicios resueltos de MRUA

1) La trayectoria de un móvil viene determinada por la expresión

$$r = 2t^2i + 2j - 8tk \text{ m}$$

- Halla las ecuaciones de la velocidad y la aceleración del móvil y di qué tipo de movimiento tiene en cada uno de los ejes.
- Calcula la posición, velocidad y aceleración del móvil a los cuatro segundos.
- ¿En qué momento la velocidad del móvil se anula?

2) La ecuación de la trayectoria de un móvil es

$$r = -t^2i + 4t^2j - 2tk \text{ m}$$

- Halla la velocidad media entre los instantes $t = 1$ y $t = 5$ segundos.
- ¿Cuánto vale la aceleración?

3) Determina cuanto vale la g en un planeta en el cual, al lanzar un objeto hacia arriba a 45 m/s tarda 20 segundos en llegar al punto más alto. ¿A qué altura lo hace?

4) Se lanza un objeto verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 50 m/s . Calcula:

- La altura máxima alcanzada.
- El tiempo que tarda en volver al suelo.
- La velocidad cuando está a mitad del recorrido ascendente.
- ¿Con qué velocidad habría que lanzarlo para que llegara hasta los 120 metros de altura?

5) Desde una altura de 200 metros se deja caer un objeto A. dos segundos después se hace lo mismo con otro objeto B, pero a este se le comunica una velocidad inicial de 4 m/s . ¿Alcanza al primer objeto antes de que llegue al suelo? Si es así ¿a qué altura lo hace?

Soluciones

1) La trayectoria de un móvil viene determinada por la expresión

$$r = 2t^2i + 2j - 8tk \text{ m}$$

a) Halla las ecuaciones de la velocidad y la aceleración del móvil y di qué tipo de movimiento tiene en cada uno de los ejes.

b) Calcula la posición, velocidad y aceleración del móvil a los cuatro segundos.

c) ¿En qué momento la velocidad del móvil se anula?

a) La ecuación de la velocidad se obtiene derivando la de la trayectoria, cada coordenada por separado:

$$v = 4ti - 8k \text{ m/s} \quad (\text{Ha desaparecido la componente } j \text{ porque la derivada de un número independiente es cero})$$

Y la de la aceleración, derivando la velocidad:

$$a = 4i \text{ m/s}^2$$

En el eje de la componente i , hay velocidad que depende del tiempo y aceleración constante, por lo que es un MRUA.

En el eje j no hay velocidad ni aceleración, por lo que no hay movimiento.

En el eje de la componente k hay velocidad constante y no hay aceleración, por lo que es un MRU.

b) Se trata de sustituir $t = 4\text{s}$ en cada una de las ecuaciones:

$$r(4) = 2 \cdot 4^2i + 2j - 8 \cdot 4k = 2 \text{ m}$$

$$v(4) = 4 \cdot 4i - 8k = 8 \text{ m/s}$$

$$a(4) = 4i \text{ m/s}^2$$

c) Simplemente igualamos la ecuación de la velocidad a cero y calculamos t :

$$v = 4ti - 8k = 0 \quad \rightarrow \quad t = 2 \text{ s}$$

2) La ecuación de la trayectoria de un móvil es

$$r = -t^2i + 4t^2j - 2tk \text{ m}$$

a) Halla la velocidad media entre los instantes $t = 1$ y $t = 5$ segundos.

b) ¿Cuánto vale la aceleración?

Cajón de Ciencias

Igual que antes, derivamos la ecuación de la trayectoria para trabajar con la velocidad:

$$r = -t^2i + 4t^2j - 2tk \text{ m} \quad \rightarrow \quad v = -2ti + 8tj - 2k \quad \text{m/s}$$

a) Para calcular la velocidad media, recurrimos a la expresión:

$$V_m = (V_f - V_0)/(t_f - t_0)$$

$$V_f = V(5) = -2 \cdot 5 + 8 \cdot 5 - 2 = 28 \text{ m/s}$$

$$V_0 = V(1) = -2 \cdot 1 + 8 \cdot 1 - 2 = 4 \text{ m/s}$$

$$V_m = (28 - 4)/(5 - 1) = 24/4 = 6 \text{ m/s}$$

b) Para hallar la aceleración, derivamos la expresión de la velocidad:

$$v = -2ti + 8tj - 2k \quad \text{m/s} \quad \rightarrow \quad a = -2i + 8j \quad \text{m/s}^2$$

3) Determina cuanto vale la g en un planeta en el cual, al lanzar un objeto hacia arriba a 45 m/s tarda 20 segundos en llegar al punto más alto. ¿A qué altura lo hace?

Los datos son:

$$V_0 = 45 \text{ m/s}$$

$$V_f = 0 \text{ (porque en el punto más alto se detiene)}$$

$$t = 20 \text{ s}$$

Utilizamos la fórmula de la velocidad del MRUA:

$$V = V_0 - g \cdot t$$

$$0 = 45 - 20g$$

$$g = -45/-20 = 2,25 \text{ m/s}^2$$

Para saber a qué altura llega, usamos la ecuación de posición del MRUA:

$$h = V_0 t - 1/2 g t^2$$

$$h = 45 \cdot 20 - 1/2 \cdot 2,25 \cdot 400 = 450 \text{ m}$$

4) Se lanza un objeto verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 50m/s. Calcula:

a) La altura máxima alcanzada.

b) El tiempo que tarda en volver al suelo.

c) La velocidad cuando está a mitad del recorrido ascendente.

d) ¿Con qué velocidad habría que lanzarlo para que llegara hasta los 120 metros de altura?

Cajón de Ciencias

a) Planteamos las ecuaciones del MRUA y colocamos los datos que conocemos. Recuerda que $V = 0$ m/s en el punto de altura máxima.

$$\begin{aligned}V &= V_0 - g \cdot t & \text{-->} & 0 = 50 - 9,8 \cdot t \\h &= V_0 t - 1/2 g t^2 & \text{-->} & h = 50t - 1/2 \cdot 9,8 \cdot t^2\end{aligned}$$

Calculamos el tiempo que tarda en llegar al punto más alto en la primera ecuación, y luego sustituimos el tiempo en la segunda para hallar la altura:

$$\begin{aligned}0 &= 50 - 9,8 \cdot t & \text{-->} & t = 5,10 \text{ s} \\h &= 50 \cdot 5,10 - 1/2 \cdot 9,8 \cdot (5,10)^2 & \text{-->} & h = 255 - 127,45 = 127,55 \text{ m}\end{aligned}$$

b) El tiro vertical es simétrico: esto quiere decir que, si despreciamos el rozamiento del aire, el objeto tarda lo mismo en subir que en bajar. Por lo tanto, el tiempo que tarda en volver al suelo es el doble que el de subida:

$$t_{\text{total}} = 5,10 \cdot 2 = 10,2 \text{ s}$$

c) Tenemos que hallar la velocidad cuando $h = 127,55/2 = 63,78$ m. Primero calculamos el tiempo en la ecuación de la altura, y luego sustituimos este tiempo en la de la velocidad:

$$\begin{aligned}63,78 &= 50t - 1/2 \cdot 9,8 \cdot t^2 & \text{-->} & 4,9 \cdot t^2 - 50t + 63,78 = 0 \\t_1 &= 1,49 \text{ s} \\t_2 &= 8,71 \text{ s}\end{aligned}$$

¿Por qué salen dos resultados para t ? Porque hay dos momentos en los que el móvil está en esa posición: el primer tiempo es para cuando el móvil va subiendo, y el segundo para cuando va bajando. ¿Cuál de los dos utilizamos para calcular la velocidad? Cualquiera: Si usamos el primer valor, nos saldrá una velocidad positiva, y si usamos el segundo, obtendremos el mismo valor en negativo (porque en ese momento el móvil va hacia abajo).

$$\begin{aligned}V &= 50 - 9,8 \cdot 1,49 = 35,40 \text{ m/s} \\V &= 50 - 9,8 \cdot 8,71 = -35,40 \text{ m/s}\end{aligned}$$

d) Ahora la incógnita es la velocidad inicial y conocemos la altura máxima. El método es el mismo: sustituimos los datos que conocemos en las ecuaciones del MRUA:

$$\begin{aligned}V &= V_0 - g \cdot t & \text{-->} & 0 = V_0 - 9,8 \cdot t \\h &= V_0 t - 1/2 g t^2 & \text{-->} & 120 = V_0 t - 1/2 \cdot 9,8 \cdot t^2\end{aligned}$$

Lo que tenemos es un sistema de ecuaciones de dos incógnitas. Lo podemos resolver como queramos (salvo por reducción, porque una de las ecuaciones es de segundo grado). Vamos a resolverlo despejando el tiempo en la primera ecuación y sustituyendo en la segunda:

$$\begin{aligned}0 &= V_0 - 9,8 \cdot t & \text{-->} & t = V_0/9,8 \\120 &= V_0 \cdot V_0/9,8 - 1/2 \cdot 9,8 \cdot (V_0/9,8)^2\end{aligned}$$

Cajón de Ciencias

$$120 = V_0^2/9,8 - 1/2 \cdot V_0^2/9,8$$

$$120 = 1/2 \cdot V_0^2/9,8$$

$$V_0^2 = 120 \cdot 9,8 \cdot 2 = 2352$$

$$V_0 = 48,5 \text{ m/s}$$

Fíjate que el resultado cuadra: antes lanzábamos a 50 m/s para alcanzar 127,55 metros de altura, y ahora lo hacemos a 48,5 m/s para llegar hasta 120 metros.

5) Desde una altura de 200 metros se deja caer un objeto A. dos segundos después se hace lo mismo con otro objeto B, pero a este se le comunica una velocidad inicial de 4m/s. ¿Alcanza al primer objeto antes de que llegue al suelo? Si es así ¿a qué altura lo hace?

Aquí planteamos las ecuaciones del MRUA para cada uno de los objetos. Consideraremos que la altura inicial vale 0 (el suelo estaría a -200m) y h será la altura a la que ambos se encuentran (si lo hacen).

Objeto A

$$\begin{aligned} V &= V_0 - g \cdot t & \text{-->} & V_A = -9,8 \cdot t \\ h &= V_0 t - 1/2 g t^2 & \text{-->} & h = -1/2 \cdot 9,8 \cdot t^2 \end{aligned}$$

Objeto B

$$\begin{aligned} V &= V_0 - g \cdot t & \text{-->} & V_B = 4 - 9,8 \cdot (t-2) \\ h &= V_0 t - 1/2 g t^2 & \text{-->} & h = 4(t-2) - 1/2 \cdot 9,8 \cdot (t-2)^2 \end{aligned}$$

Cuando se encuentren, la altura será la misma para ambos, y el tiempo para B habrá sido de dos segundos menos (porque ha salido dos segundos después). Con las ecuaciones de la altura de A y B hacemos un sistema, que resolveremos por igualación, aprovechando que la altura ya está despejada:

$$\begin{aligned} h &= -1/2 \cdot 9,8 \cdot t^2 \\ h &= 4(t-2) - 1/2 \cdot 9,8 \cdot (t-2)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -1/2 \cdot 9,8 \cdot t^2 &= 4(t-2) - 1/2 \cdot 9,8 \cdot (t-2)^2 \\ -4,9t^2 &= 4t - 8 - 4,9 \cdot (t^2 + 4 - 4t) \\ -4,9t^2 &= 4t - 8 - 4,9t^2 + 19,6 - 19,6t \\ -15,6t + 11,6 &= 0 \\ t &= 0,74 \text{ s} \end{aligned}$$

$$\text{Y por lo tanto, } h = -1/2 \cdot 9,8 \cdot (0,74)^2 = -2,68 \text{ m}$$

Sale negativo porque, recuerda, contábamos el cero en el punto alto y las alturas hacia abajo se cuentan en negativo. Claramente B alcanza a A antes de llegar al suelo.