Discusión de sistemas de ecuaciones

En las matemáticas de segundo de Bachillerato (y en los exámenes de selectividad) son bastante comunes los ejercicios como éste:

Discutir el siguiente sistema de ecuaciones en función de k:

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ ky + kz = 2 \\ kx + ky + z = 1 \end{array}\right\}$$

Pero ¿qué significa *discutir* un sistema de ecuaciones? Pues ni más ni menos que decir qué tipo de sistema será según qué valores tome la letra que está metida como coeficiente de una o más incógnitas. Recuerda que teníamos tres tipos de sistemas:

- Sistemas compatibles determinados (SCD): los que tienen una única solución.
- Sistemas compatibles indeterminados (SCI): los que tienen infinitas soluciones.
- Sistemas incompatibles (SI): los que no tienen ninguna solución.

Para discutir un sistema de ecuaciones hace falta tener claros algunos conceptos y operaciones de las matrices: el rango de un determinante y cómo calcular un determinante sobre todo (si luego nos piden resolver el sistema, también el método de Cramer, pero eso no lo veremos en este documento).

Rango de una matriz es el determinante de mayor tamaño distinto de cero que podemos encontrar. Es decir, si tenemos una matriz de 3x3 y su determinante es distinto de cero, la matriz tiene rango 3. Si el determinante es igual a cero, buscaríamos a ver si hay un determinante de 2x2 distinto de cero y así sucesivamente.

En cuanto al **cálculo de un determinante**, si no te acuerdas, repásalo antes de meterte con la explicación que sigue. Para la forma de calcular un determinante, puedes encontrar una presentación de diapositivas en el apartado "Matrices" de la sección de Matemáticas de Secundaria.

Vamos a la faena

Vamos a trabajar con el sistema que hemos puesto antes como ejemplo, para así ver los pasos más claros. Como en todos los temas de Matemáticas, conviene que luego lo practiques tú por tu cuenta para ver si realmente has entendido todos los pasos.

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ ky + kz = 2 \\ kx + ky + z = 1 \end{array}\right\}$$

En primer lugar, vamos a escribir la matriz de coeficientes y la de soluciones del sistema. A la primera la llamaremos *A*.

$$A \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & k & k \\ k & k & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos primero el determinante de A. Como tiene parámetros, el resultado nos saldrá en función de k:

$|A| = k + k^2 - k^2 - k^2 = k - k^2$

Igualamos el determinante a cero, para ver qué valor (en este caso valores, porque es una ecuación de segundo grado) hace que el determinante valga cero. Recuerda que si el determinante de 3x3 vale cero, el rango de la matriz no va a ser 3, sino 2.

$k - k^2 = 0$
$k_1 = 0$
$k_2 = 1$

Ya podemos ofrecer la primera conclusión de nuestra discusión. El determinante de A solo vale cero para esos valores, por lo que

Para $k \neq 0$ y $k \neq 1$, $|A| \neq 0$, y entonces Rango (A) = Rango (A') = 3 = nº de incógnitas, por lo que sería un sistema compatible determinado.

<u>Explicación</u>: ya hemos dicho que si el determinante de A es distinto de cero (o sea, para cualquier valor menos para las soluciones de la ecuación anterior), hay un determinante 3x3 distinto de cero y el rango de la matriz es 3. La A ampliada (A') es la matriz A a la que añadimos la columna de la matriz de soluciones:

$$A' \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & k & k & 2 \\ k & k & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Pero ¿cómo sabemos que el rango de A' también es 3 sin hacer ni un solo cálculo? Porque si dentro de A ya hemos encontrado un 3x3 distinto de cero, añadir una columna más no cambia las cosas: sigue habiendo un 3x3 distinto de cero ¡el que salía de A!

Por último si el rango de A es igual que el de A' y es igual que el número de soluciones, tenemos un sistema de tres ecuaciones linealmente independientes para tres incógnitas, y por lo tanto tendrá una solución única (esto se llama **Teorema de Rouché-Frobënius**).

Fin de la explicación. Seguimos con el ejercicio. Ahora tenemos que ver qué pasa si la k vale cero, y luego qué pasa si la k vale 1. Vayamos paso por paso.

Si $k = 0$

Si $k = 0$, nuestra matriz A' quedaría así:

$$A' \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora tenemos que ver cuál es el rango de A', porque...

si Rango (A) = Rango (A') = 2 < nº de incógnitas, el sistema es compatible indeterminado.
si Rango (A) = 2 y Rango (A') = 3, el sistema es incompatible.

(Este es el resto del Teorema de Rouché-Frobënius. Al acabar, lo resumiremos de nuevo).

A lo que íbamos: toca calcular el Rango(A'). Tenemos que buscar un 3x3 distinto de cero para demostrar que el rango es 3. Probamos con el determinante formado por la segunda, tercera y cuarta columnas:

$$A' \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$|A'| = 0 + 0 + 0 - 0 -2 - 0 = -2$

En cuanto encontremos un determinante 3x3 distinto de cero dejamos de buscar. Con esto nos basta para el segundo resultado de la discusión:

Si k = 0, Rango (A) = 2 y Rango (A') = 3, y por lo tanto es un sistema incompatible.

Si $k = 1$

Si $k = 1$, tenemos como A':

$$A' \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Parémonos un momento en este punto. Hay una manera larga y una manera corta de seguir. La manera larga (que tendrás que hacer de todas formas en la mayoría de los casos) es calcular los distintos determinantes de 3x3 de A' hasta encontrar (y si es que encuentras) uno distinto de cero. Si lo hay, estarías en el caso anterior (cuando k valía cero); si todos los determinantes valen cero, el rango de A' es 2 y sería un sistema incompatible.

¿Y la manera corta? Darse cuenta de que, como hay dos filas iguales, *todos los determinantes de 3x3 de esa matriz van a valer cero.* Aquí es donde los que se han estudiado las propiedades de las matrices y los determinantes tienen una justa ventaja. Si escribes el razonamiento y vas directo al resultado, te ahorras un montón de tiempo. Claro que, si no existiera el detalle de las dos filas (o columnas) iguales, la única forma es la forma larga.

Sabiendo esto, escribimos que

Si *k* = 1, Rango (A) = Rango (A') = 2 < nº de incógnitas, por lo que es un sistema compatible indeterminado.

Y ya está nuestro sistema discutido. Hagamos un rápido y breve resumen de los pasos:

1) Escribimos la matriz de coeficientes (A) y la de soluciones.
2) Calculamos |A|. Nos queda una expresión con incógnita. Igualamos a cero y nos salen uno o dos valores (según de qué tipo sea la ecuación).
3) Señalamos la primera conclusión: Si el parámetro es distinto de estas soluciones, el rango de A y el de A' valen 3, y es un sistema compatible determinado (una solución).
4) Sustituimos el parámetro por cada una de las soluciones que obtuvimos. Para cada una, buscamos en A' un determinante 3x3 distinto de cero.
5) Si encontramos aunque solo sea uno, el rango de A' es 3, y nuestra conclusión será: Para ese valor del parámetro, Rango (A) es 2, Rango (A') es 3 y tenemos un sistema incompatible (ninguna solución).
6) Si no encontramos ninguno distinto de cero (y hay que probar todos los determinantes 3x3 posibles en la A'), entonces nuestra conclusión es: Para ese valor del parámetro, Rango (A) = Rango (A') = 2, y es un sistema compatible indeterminado (infinitas soluciones).

Para los más avispados

<u>Normalmente</u> (y, por favor, fíjate que está subrayado) en los exámenes los ejercicios de este tipo siguen un mismo patrón: el determinante de A es una ecuación de segundo grado, una de las soluciones lleva a un sistema incompatible y otra a un sistema compatible indeterminado. Es una forma de meter las tres cosas en un mismo ejercicio. Eso quiere decir que, si |A| te queda de segundo grado, es razonable sospechar cuáles serán los resultados, y podrás revisar los cálculos si no te sale lo mismo. Pero ojo: nada quita que un examinador ponga un ejercicio con dos resultados para sistema incompatible. Si repasas los cálculos y no encuentras errores por ningún lado, no obligues a los números a que den un resultado incorrecto.

El Teorema de Rouché-Frobënius y ¿qué tiene que ver el rango con el número de soluciones?

Este teorema se resume en tres puntos:

Si Rango (A) = Rango (A') = nº de incógnitas, el sistema es compatible determinado, y hay una solución única.
Si Rango (A) = Rango (A') < nº de incógnitas, el sistema es compatible indeterminado, y hay infinitas soluciones.
Si Rango (A) ≠ Rango (A'), el sistema es incompatible (ninguna solución).

Fíjate que, cuando antes hemos hablado de rango 3 y rango 2, era refiriéndonos siempre a un sistema de 3 ecuaciones con 3 incóngitas. Si hubiese sido con cuatro incógnitas, el rango de A y de A' tendría que haber sido de 4 para que el sistema fuese compatible determinado.

Pero ¿qué es el rango? El rango es lo que nos indica cuántas ecuaciones del sistema son linealmente independientes ("auténticas", podríamos decir coloquialmente). Si tenemos tres ecuaciones pero el rango es 2, una de las ecuaciones se ha sacado a partir de las otras dos, y por lo tanto no es útil para resolver el sistema. Recuerda que, para que un sistema de ecuaciones tenga una solución única, tiene que haber tantas ecuaciones independientes como incógnitas.