Problemas de probabilidad: binomial

1) Un jugador de baloncesto tiene un porcentaje de encestar del 65%. Calcula la probabilidad de que en 9 lanzamientos enceste exactamente 5 veces.

2) Un juego consiste en lanzar veinte veces un dado de seis caras, y el jugador se anota un tanto por cada seis que consiga. Si consigue menos de cuatro tantos, debe retirarse del juego, y si consigue más de 16, gana automáticamente. Calcula:

a) la probabilidad de que un jugador deba retirarse
b) gane automáticamente.

3) Una pareja tiene pensado tener seis hijos. Si la probabilidad de que cada bebé sea niño es de 0,49, calcular la probabilidad de:

a) Tres sean niñas.
b) Al menos dos sean niños.
c) Haya al menos una niña.

4) Un estreno de cine ha sido visto, según las encuestas, por el 85% de la gente. Se escogen doce personas al azar. Calcular la probabilidad de que entre ellas hayan visto la película

a) dos personas.
b) Al menos dos personas.
c) Como máximo dos personas.

5) En una población determinada se ha estimado que la probabilidad de que un hombre llegue a los 80 años es del 78%. Se escogen cinco personas al azar. Calcular la probabilidad de que:

a) Las cinco personas lleguen a los 80 años.
b) Ninguna llegue a los 80 años.

Soluciones

1) *Un jugador de baloncesto tiene un porcentaje de encestar del 65%. Calcula la probabilidad de que en 9 lanzamientos enceste exactamente 5 veces.*

Recordamos la fórmula básica de la binomial:

$$P(x = n) = \binom{m}{n} \cdot p^{n} \cdot q^{m-n}$$

Donde *n* es el número de aciertos, *m* el número de intentos, *p* la probabilidad de éxito y *q* la de fracaso.

Para este caso,

$$P(x = 5) = \binom{9}{5} \cdot 0{,}65^{5} \cdot 0{,}35^{4} = 0{,}22$$

2) *Un juego consiste en lanzar veinte veces un dado de seis caras, y el jugador se anota un tanto por cada seis que consiga. Si consigue menos de cuatro tantos, debe retirarse del juego, y si consigue más de 16, gana automáticamente. Calcula:*

a) la probabilidad de que un jugador deba retirarse
b) gane automáticamente.

Aunque este problema nos hable de lanzar un dado, que tiene 6 posibles resultados, sigue siendo un problema de binomial, porque solo tenemos en cuenta los casos "éxito" (sacar un 6, probabilidad = 1/6) o "fracaso" (sacar menos de 6, probabilidad = 5/6)

a) para que un jugador se retire, debe conseguir 0, 1, 2 o 3 tantos; es decir $P(x<4)$. Pero la binomial no nos permite trabajar con rangos, sino solo con casos concretos. En resumen, hay que calcular las siguientes probabilidades:

$P(x=0)$ $P(x=1)$ $P(x=2)$ $P(x=3)$

Pues vamos a ellas:

$$P(x = 0) = \binom{20}{0} \cdot 1/6^{0} \cdot 5/6^{20} = 0{,}03$$

$$P(x = 1) = \binom{20}{1} \cdot 1/6^{1} \cdot 5/6^{19} = 0{,}10$$

$P(x = 2) = \binom{20}{2} \cdot 1/6^2 \cdot 5/6^{18} = 0{,}20$

$P(x = 3) = \binom{20}{3} \cdot 1/6^3 \cdot 5/6^{17} = 0{,}24$

Por lo que $P(x<4) = 0{,}03+0{,}10+0{,}20+0{,}24 = 0{,}57$

b) Sigue el mismo planteamiento:

$P(x = 17) = \binom{20}{17} \cdot 1/6^{17} \cdot 5/6^3 = 3{,}9 \cdot 10^{-11}$

$P(x = 18) = \binom{20}{18} \cdot 1/6^{18} \cdot 5/6^2 = 2{,}60 \cdot 10^{-13}$

$P(x = 19) = \binom{20}{19} \cdot 1/6^{19} \cdot 5/6^1 = 2{,}73 \cdot 10^{-14}$

$P(x = 20) = \binom{20}{20} \cdot 1/6^{20} \cdot 5/6^0 = 2{,}74 \cdot 10^{-16}$

Entonces $P(x>16) = 3{,}9 \cdot 10^{-11} + 2{,}60 \cdot 10^{-13} + 2{,}73 \cdot 10^{-14} + 2{,}74 \cdot 10^{-16} = 3{,}93 \cdot 10^{-11}$

3) *Una pareja tiene pensado tener seis hijos. Si la probabilidad de que cada bebé sea niño es de 0,49, calcular la probabilidad de:*

a) Tres sean niñas.

Sin ningún tipo de connotación, vamos a llamar "éxito" a tener una niña, y "fracaso" a tener un niño. Teniendo en cuenta esto, el problema se plantea como los anteriores:

$P(x = 3) = \binom{6}{3} \cdot 0{,}51^3 \cdot 0{,}49^3 = 0{,}31$

b) Al menos dos sean niños.

"Al menos dos sean niños" quiere decir que "como mucho, cuatro pueden ser niñas". Podemos calcular las probabilidades para 0, 1, 2, 3 y 4 niñas, o bien, una forma mucho más corta calcular el suceso contrario (5 y 6 niñas) y restarlo de la probabilidad total (que siempre vale 1).

$P(x \leq 4) = 1 - P(x = 5) - P(x = 6)$

$P(x = 5) = \binom{6}{5} \cdot 0{,}51^5 \cdot 0{,}49^1 = 0{,}10$

$P(x = 6) = \binom{6}{6} \cdot 0{,}51^6 \cdot 0{,}49^0 = 0{,}02$

$P(x \leq 4) = 1 - 0{,}10 - 0{,}02 = 0{,}88$

c) Haya al menos una niña.

Otro caso que se resuelve mejor calculando el suceso contrario. Ojo, que en este punto muchos se equivocan: lo contrario a “al menos una” es “ninguna”.

$P(x = 0) = \binom{6}{0} \cdot 0{,}51^0 \cdot 0{,}49^6 = 0{,}01$

$P(x \geq 1) = 1 - 0{,}01 = 0{,}99$

4) *Un estreno de cine ha sido visto, según las encuestas, por el 85% de la gente. Se escogen doce personas al azar. Calcular la probabilidad de que entre ellas hayan visto la película*

Un problema muy parecido al anterior. En este caso, la probabilidad de éxito es de 0,85.

a) dos personas.

$P(x = 2) = \binom{12}{2} \cdot 0{,}85^2 \cdot 0{,}15^{10} = 2{,}75 \cdot 10^{-7}$

b) Al menos dos personas.

“Al menos dos personas” es el suceso contrario de “menos de dos”.

$P(x = 0) = \binom{12}{0} \cdot 0{,}85^0 \cdot 0{,}15^{12} = 1{,}30 \cdot 10^{-10}$

$P(x = 0) = \binom{12}{1} \cdot 0{,}85^1 \cdot 0{,}15^{11} = 8{,}82 \cdot 10^{-9}$

$P(x \geq 2) = 1 - 1{,}30 \cdot 10^{-10} - 8{,}82 \cdot 10^{-9} = 0{,}99$

c) Como máximo dos personas.

“Como máximo dos” quiere decir que nos valen los sucesos 0, 1 y 2. Ya los hemos calculado en apartados anteriores, así que solo tenemos que sumar:

$P(x \leq 2) = 1{,}30 \cdot 10^{-10} + 8{,}82 \cdot 10^{-9} + 2{,}75 \cdot 10^{-7} = 2{,}84 \cdot 10^{-7}$

5) *En una población determinada se ha estimado que la probabilidad de que un hombre llegue a los 80 años es del 78%. Se escogen cinco personas al azar. Calcular la probabilidad de que:*

Ahora llamamos “éxito” a llegar a los 80 años, con una probabilidad de 0,78.

a) Las cinco personas lleguen a los 80 años.

$$P\ (x = 5) = \binom{5}{5} \cdot 0{,}78^5 \cdot 0{,}22^0 = 0{,}29$$

b) Ninguna llegue a los 80 años.

$$P\ (x = 0) = \binom{5}{0} \cdot 0{,}78^0 \cdot 0{,}22^5 = 5{,}15 \cdot 10^{-4}$$

Este último ejercicio, aunque más simple comparado con los dos precedentes, lo hemos incluido como un ejemplo de aplicación en la vida real: ¡no es ninguna tontería el que las compañías aseguradoras utilizan la probabilidad y la estadística para maximizar los beneficios de sus negocios!