Ejercicios resueltos de límites

a) $\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2+x-1}{x+10}$

b) $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-2x}{4x-8}$

c) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+3x-1}{x^4+20}$

d) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-2x+1}{x^2-1}$

e) $\lim_{x\to\infty} \frac{4x^3+x^2+4}{x+10}$

f) $\lim_{x\to\infty} \frac{-3x^5-1}{x^4+9}$

g) $\lim_{x\to\infty} \frac{24x^2+5x-10}{-4x^2+10x-8}$

h) $\lim_{x\to -2} \frac{x^3-2x+6}{x^3+x^2-x+2}$

i) $\lim_{x\to\infty} \frac{4x^2+5x-2}{\sqrt{x^4-3x+2}}$

j) $\lim_{x\to -1} \frac{4x^3-4}{x^2-1}$

k) $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-3x-2}{x^3+x-10}$

l) $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+x-8}{x+6x^2+10}$

Soluciones

a) $\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2+x-1}{x+10}=\infty$

Es un límite con indeterminación del tipo infinito partido infinito. Se resuelven comparando los grados del numerador y del denominador. Como en este caso el grado del numerador es superior, y los dos términos de mayor grado tienen signo positivo, el límite tiende a más infinito.

b) $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-2x}{4x-8}$

Éste es un límite con indeterminación de número partido cero, lo que equivale a una asíntota vertical. Tenemos que calcular los límites laterales, que siempre valdrán más infinito o menos infinito. Recuerda que para hallar estos límites, sustituimos la *x* por un número lo bastante cercano al límite (en este caso, 1,999 por la izquierda, y 2,001 por la derecha) y nos fijamos en el signo del resultado para ver si el límite lateral tiende a +∞ o -∞.

$\lim_{x\to 2^-} \frac{x^3-2x}{4x-8}=-\infty$ $\lim_{x\to 2^+} \frac{x^3-2x}{4x-8}=+\infty$

c) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+3x-1}{x^4+20}=0$

Otra indeterminación de infinito partido infinito. Como en este caso el grado del denominador es mayor, el límite tiende a cero.

d) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-2x+1}{x^2-1}$

Ahora es una indeterminación del tipo cero partido de cero. En estos casos, lo que había que hacer era factorizar numerador y denominador, y entonces simplificamos. Obligatoriamente debe quedar algo para simplificar: si no te sale así, revisa los cálculos que algo habrás hecho mal.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-2x+1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x-1)}{(x+1)(x-1)}=\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)}{(x+1)}=0$$

e) $\lim_{x\to\infty} \frac{4x^3+x^2+4}{x+10}=\infty$

Este es como el a). Sin problema.

f) $\lim_{x\to\infty} \frac{-3x^5-1}{x^4+9}=-\infty$

Como el anterior, pero como en este caso el término de mayor grado del numerador es negativo, y el del denominador es positivo, el límite vale menos infinito.

g) $\lim_{x\to\infty} \frac{24x^2+5x-10}{-4x^2+10x-8}=\frac{24}{-4}=-6$

Otro caso de infinito partido infinito. Ahora el grado del numerador es igual que el del denominador, así que el límite es igual a la división de los correspondientes coeficientes.

h) $\lim_{x\to-2} \frac{x^3-2x+6}{x^3+x^2-x+2}$

Otra indeterminación de número partido de cero. Hallamos los límites laterales, como en el b).

$\lim_{x\to-2^-} \frac{x^3-2x+6}{x^3+x^2-x+2}=+\infty$ $\qquad$ $\lim_{x\to-2^+} \frac{x^3-2x+6}{x^3+x^2-x+2}=+\infty$

i) $\lim_{x\to\infty} \frac{4x^2+5x-2}{\sqrt{x^4-3x+2}}$

Esta es una indeterminación de infinito partido infinito, pero atención que tiene truco. Uno podría pensar que da cero porque el grado del denominador es mayor que el del numerador ¡Pero no es así! El grado del denominador es en realidad 2, porque es un x^4 dentro de una raíz cuadrada. Así que el límite vale en realidad la división de coeficientes.

$\lim_{x\to\infty} \frac{4x^2+5x-2}{\sqrt{x^4-3x+2}}$ = 4/1 = 4

Ojo: si el coeficiente del x^4 hubiese sido un número distinto de 1, se le "aplica" también la raíz cuadrada a la hora de calcular el límite. Por ejemplo:

$\lim_{x\to\infty} \frac{4x^2+5x-2}{\sqrt{9x^4-3x+2}}=\frac{4}{\sqrt{9}}=\frac{4}{3}$

j) $\lim_{x \to -1} \frac{4x^3-4}{x^2-1}$

Indeterminación de número partido cero. Hallamos los límites laterales:

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{4x^3-4}{x^2-1} = -\infty \qquad \lim_{x \to -1^+} \frac{4x^3-4}{x^2-1} = +\infty$$

k) $\lim_{x \to 2} \frac{x^3-3x-2}{x^3+x-10}$

Una indeterminación del tipo cero partido cero. Factorizamos, simplificamos y resolvemos.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3-3x-2}{x^3+x-10} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+1)(x+1)}{(x-2)(x^2+2x+5)} = \lim_{x \to 2} \frac{(x+1)(x+1)}{(x^2+2x+5)} = \frac{9}{13}$$

En realidad no hace falta factorizar completamente. Basta con “sacar” el binomio que tiene el número al que tiende el límite, y que es el que hace que numerador y denominador valgan cero. Pero si te sientes más cómodo factorizando todo (y puede que sirva para simplificar más cosas), adelante, que no está mal hacerlo.

l) $\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2+x-8}{x+6x^2+10} = \frac{1}{2}$

Otra indeterminación de infinito entre infinito. Atención aquí, que los términos del denominador están desordenados, para que piquemos y no nos demos cuenta de que el grado del denominador es también dos.