Factorización de polinomios

Una vez que sabemos cómo utilizar Ruffini para la división de polinomios, seremos capaces de dar el siguiente paso: la factorización de polinomios. (Si no tienes claro cómo se hace Ruffini, consulta el archivo que te explica cómo hacerlo).

¿Qué es factorizar un polinomio? Es transformar - dentro de lo posible - el polinomio original en una serie de binomios del tipo $(x \pm a)$ que se multiplican entre sí. Por ejemplo, el polinomio $P(x) = x^2 - 2x + 1$ se puede descomponer como $(x-1)(x-1)$.

Para factorizar un polinomio cualquiera, usamos el método de Ruffini, sólo que en esta ocasión no sabemos cuánto vale el número **a**. Tendremos que probar varios hasta que encontremos un número que nos dé resto cero.

Por ejemplo, vamos a factorizar el polinomio $P(x) = x^3 + x^2 - 9x - 9$.

	1	1	-9	-9
?				
				Resto = 0

Aunque no sepamos qué número es el que nos dará de resto cero, no vamos a probar totalmente al azar. Puedes tener la seguirdad de que si hay algun número que cumple esa condición, va a ser un divisor del último coeficiente del polinomio (en este caso, sólo probaremos con 1, -1, 3 y -3)**.** Si probamos un número y no nos da resto cero, borramos y empezamos desde el principio con otro de los "sospechosos".

a) Probamos con el -1 y obtenemos:

	1	1	-9	-9
-1		-1	0	9
	1	0	-9	0

b) No nos quedamos aquí. El polinomio que nos ha dado como solución, lo seguimos operando con Ruffini. Probamos con +3:

	1	1	-9	-9
-1		-1	0	9
	1	0	-9	0
3		3	9	
	1	3	0	

c) Y repetimos una vez más, hasta que el polinomio no dé más de sí:

	1	1	-9	-9
-1		-1	0	9
	1	0	-9	0
3		3	9	
	1	3	0	
-3		-3		
	1	0		

d) Nuestro polinomio factorizado quedaría así:

$$(x^3 + x^2 - 9x - 9) = (x+1)\ (x-3)\ (x+3)$$

Lo que hemos hecho ha sido colocar como **a** para cada factor la correspondiente solución de Ruffini cambiada de signo.

Observa que:

1. *En principio*, deben salir tantos binomios ($x \pm a$) como grado tenga el polinomio.
2. Si todos los coeficientes del polinomio que estás factorizando son positivos, no pruebes soluciones positivas, porque será imposible que te den un resto igual a cero.
3. Si mientras factorizas pruebas un número y no te da resto cero, no te molestes en volver a probarlo después: si antes no fue solución, no lo va a ser nunca.
4. Sin embargo, un número que ha valido como solución, puede volver a servir. Es decir, un polinomio puede tener una factorización, por ejemplo, de (x-1)(x-1)(x-1)(x-1).
5. Si al llegar a un punto no ha servido ninguno de los números "sospechosos" (recuerda, los divisores del último coeficiente), el polinomio no se puede factorizar más. Por ejemplo, al factorizar el polinomio $P(x) = x^4 + x^3 - x^2 + x - 2$:

	1	1	-1	1	-2
1		1	2	1	2
	1	2	1	2	0
-2		-2	0	-2	
	1	0	1	0	

Este último polinomio ($x^2 + 1$) no se puede descomponer, por lo que la factorización de P(x) será:

$$(x^4 + x^3 - x^2 + x -2) = (x-1)\,(x+2)\,(x^2 + 1)$$

Para qué sirve todo esto:

Factorizar polinomios tiene unas cuantas utilidades, que no son ninguna tontería:

En primer lugar, el método es el equivalente a la descomposición de números en factores primos (sólo que para polinomios). La descomposición en factores primos servía para calcular denominadores comunes; la factorización de polinomios, por lo tanto, sirve para **hallar denominadores comunes cuando estos están formados por polinomios**.

En segundo lugar, nos permitirá **simplificar más fácilmente los polinomios** (o ecuaciones) en las que numerador y denominador sean polinomios. Si al factorizar arriba y abajo vemos que hay soluciones comunes, estas se podrán simplificar.

En tercer lugar, nos permite **hallar soluciones a ecuaciones de cualquier grado** (siempre y cuando puedan factorizarse con Ruffini). Si nos dan la ecuación de tercer grado

$$x^3 + x^2 - 9x - 9 = 0$$

Simplemente factorizamos el polinomio, con lo que tendremos:

$$(x+1)\,(x-3)\,(x+3) = 0$$

Si esos tres factores multiplicados dan cero, las soluciones serán los números que hagan que cada uno de ellos valga cero (es decir, -1, 3 y -3, que eran, precisamente, las soluciones de Ruffini).