Cómo resolver inecuaciones (I)

Las inecuaciones son un tipo especial de ecuaciones en las que, en lugar de un signo igual, tenemos un signo de desigualdad entre ambos lados de la expresión. Estos signos pueden ser $<$ (menor que), $>$ (mayor que), $\leq$ (menor o igual que) o $\geq$ (mayor o igual que). Algo como esto:

$$3(x - 2) > 6x + 3$$

Este pequeño cambio tiene dos consecuencias a la hora de resolverlas:

- El resultado de una inecuación no va a ser un número exacto, sino un rango de números. No tendremos soluciones del estilo $x = -5$, sino $x < -5$, o lo que es lo mismo, *cumplen la inecuación todos los números menores que -5.*

- Cuando haya que pasar al otro lado de la expresión un número negativo que esté multiplicando o dividiendo, el signo de la inecuación cambia de sentido (le "daremos la vuelta").

Aparte de estos dos puntos, las reglas para resolver una inecuación serán las mismas que las de una ecuación normal. Vamos a verlo más claro resolviendo la inecuación que poníamos antes como ejemplo:

$$3(x - 2) > 6x + 3$$

En primer lugar, como haríamos en cualquier ecuación, resolvemos primero los paréntesis:

$$3x - 6 > 6x + 3$$

Después pasamos todos los términos con equis a un lado y los términos independientes al otro.

$$3x - 6x > 3 + 6$$

Hasta aquí no hemos hecho nada que no haríamos en una ecuación típica. Fíjate que el -6 que hemos pasado a la derecha no afecta para nada al signo de la inecuación, porque no estaba ni multiplicando ni dividiendo. Operamos:

$$-3x > 9$$

Aquí sí empiezan a pasar ya cosas distintas. Ese -3 de la izquierda debe pasar al otro lado, y como es un número negativo que está multiplicando, debemos invertir el signo de "mayor que" de la inecuación:

$$x < 9/-3$$
$$x < -3$$

Ya podemos darnos palmaditas en el hombro. Hemos resuelto nuestra primera inecuación. El resultado, $x < -3$, es como habíamos comentado en el primer punto de la página anterior, un grupo de números: la solución es todos los números menores que -3. Hagamos un paréntesis en este punto para explicar varias formas de expresar esta solución.

Cómo dar la solución de una inecuación

Existen al menos tres formas de escribir la solución de una inecuación. Usar una u otra dependerá de qué te pidan en el ejercicio, o qué costumbres tenga tu profesor de matemáticas. Si no te indican que uses una u otra, puedes escoger la que prefieras (aunque está bien que domines las tres).

a) Como una desigualdad

Consiste en escribir la solución tal y como aparece al final de la resolución de la inecuación: $x < -3$. Nada nuevo, como puedes ver.

b) Como un intervalo

Aquí escribimos desde qué número a qué numero se incluye la solución, delimitando por ambos lados con un paréntesis o un corchete. Si uno de los extremos del intervalo no tiene un número concreto (como es el caso de nuestra inecuación de ejemplo), significa que el intervalo termina (o empieza, según lo mires) en el infinito positivo o negativo ($+\infty$ o $-\infty$).

Usaremos un paréntesis cuando nuestro intervalo **no incluya** el número del extremo[1], y un corchete cuando **sí lo incluya**. Los signos *menor que* y *mayor que* nunca incluyen el número del extremo (-3 no es menor que -3), mientras que los signos de *mayor o igual que* y *menor o igual que* sí incluyen el extremo, y por lo tanto llevan corchete. Por definición, un intervalo cuyo extremo sea un infinito **siempre** va con paréntesis (poner un corchete significaría que estamos incluyendo el último número de todos los números, lo cual no existe).

La solución de nuestra inecuación ($x < -3$) se expresaría así:

$x \in (-\infty , -3)$[2] → Todos los números comprendidos entre el -3 (sin incluirlo) hasta $-\infty$.

Aquí van otros ejemplos de intervalos, para que le vayas cogiendo el tranquillo:

$x \in (-2, 4]$ → Todos los números entre el -2 (sin incluir) y el 4 (inclusive).
$x \in (0, +\infty)$ → Todos los números entre el 0 y el $+\infty$ (todos los positivos).
$x \in [6,7]$ → Todos los números entre el 6 y el 7, ambos inclusive (por ejemplo, 6,025).
$X \in (-\infty,+\infty)$ → Todos los números desde $-\infty$ hasta $+\infty$ (es decir, todos los números).

1 Si un intervalo, por ejemplo, termina en el 8 sin incluirlo, se entiende que el último número del intervalo es del estilo de 7,999999999999... En realidad, puedes escribir todos los nueves que te apetezcan sin alcanzar nunca el 8, así que no tiene sentido hablar de "el último número del intervalo".

2 El símbolo $\in$ se lee "existe en". La expresión arriba se leería entonces como "equis (la solución) existe entre menos infinito y -3, sin incluir los extremos".

c) En la recta numérica

También podemos escribir la solución mediante un esquema en la recta numérica. En estos casos, en lugar de paréntesis y corchetes, usaremos puntos vacíos o puntos rellenos (respectivamente) colocados sobre los extremos de los intervalos. Si uno de los extremos es un infinito, lo indicaremos con una flecha apuntando en la dirección apropiada. La solución de nuestra inecuación de ejemplo ya la habíamos escrito como $x < -3$ y como $(-\infty, -3)$. En este nuevo formato la pondríamos así:

La solución $(-2, 4]$, por otro lado, se escribiría así:

Ahora que ya hemos visto cómo poner las soluciones, vamos a resolver un par de inecuaciones más de ejemplo antes de pasar a los sistemas de inecuaciones con una incógnita.

$$5(x - 4) + 6x \leq -2(x + 12)$$

$$5x - 20 + 6x \leq -2x - 24$$

$$5x + 6x + 2x \leq -24 + 20$$

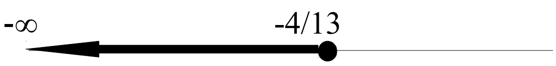
$$13x \leq -4$$

$$x \leq -4/13$$

<u>Solución:</u>

$$x \leq -4/13$$

$$x \in (-\infty, -4/13]$$



$$15x + 8(x-2) < 2(14x + 9) - 6$$

$$15x + 8x - 16 < 28x + 18 - 6$$

$$15x + 8x - 28x < -6 + 16$$

$$-5x < 10$$

$$x > 10/-5$$

$$x > -2$$

<u>Solución:</u>

$$x > -2$$

$$x \in (-2, +\infty)$$

Sistemas de inecuaciones de una sola incógnita

¡Acabamos de empezar con inecuaciones y ya pasamos a *sistemas*! Quizás pienses que vamos demasiado rápido, pero no te asustes. Los sistemas de inecuaciones con una sola incógnita son tan fáciles de entender que no nos hemos resistido a ponerlos junto con las inecuaciones sencillas. Para otra ocasión dejaremos las inecuaciones de segundo grado y los sistemas de inecuaciones con dos incógnitas. Como siempre, vamos a acompañar la explicación con un ejemplo:

$$\left.\begin{array}{r}3x - 5 < 5x + 3\\ 4(x - 2) \leq 3x + 1\end{array}\right\}$$

Empecemos con las buenas noticias: aquí no hay métodos de reducción, sustitución o igualación como en los sistemas que has visto hasta ahora. De hecho, lo único que tienes que hacer es resolver cada inecuación por separado, como si en vez de un ejercicio de sistemas de inecuaciones fuera un ejercicio con dos apartados, cada uno con una inecuación sencilla. Vamos con ello.

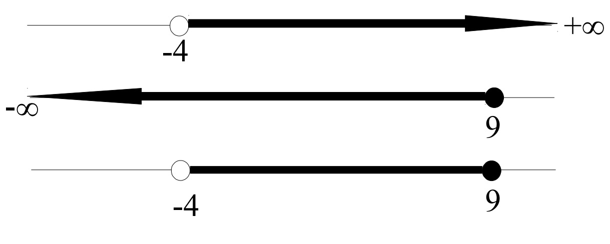
$3x - 5 < 5x + 3$	$4(x - 2) \leq 3x + 1$
$3x - 5x < 3 + 5$	$4x - 8 \leq 3x + 1$
$-2x < 8$	$4x - 3x \leq 1 + 8$
$x > 8/-2$	$x \leq 9$
$x > -4$	

De lo que se trata ahora es de comparar ambas soluciones y ver qué grupo de números *cumple ambas soluciones al mismo tiempo*. Para esto suele ayudar expresar las soluciones sobre la recta numérica:

Inecuación 1 *(-4,+∞)*

Inecuación 2 *(-∞, 9]*

Intervalo común *(-4, 9]*



¡Y ya está! ¿A qué no era para tanto? De hecho, fíjate que no te costaría "atacar" un sistema de tres o cuatro inecuaciones de una sola incógnita. Lo único que tendrías que hacer es resolverlas por separado y comparar luego las soluciones para ver dónde coinciden *todas a la vez.* Si no hubiese ninguna coincidencia para todas las inecuaciones de un sistema, diremos que "no existe solución" ¡Así de fácil y así de simple!