

Probabilidad condicionada

La probabilidad condicionada es un concepto de las matemáticas que suele confundir a muchos, pero en realidad es bastante sencillo cuando se sabe visualizar. Vamos a ver en qué consiste paso a paso y mediante ejemplos, y haremos al final un ejercicio para dejar las cosas más asentadas.

Empecemos con dos sucesos A y B. Por ejemplo, tenemos un grupo de personas y A es "ser hombre" y B, "jugar al ajedrez". P(A) es la probabilidad de elegir al azar a una persona de sexo masculino. Hasta aquí claro.

En este contexto, la probabilidad de A condicionada a B - algo que se simboliza como $P(A/B)$ - significa "cuál es la probabilidad de que ocurra A sabiendo que ya ha ocurrido B. En los libros encontrarás que la fórmula para calcular esto es:

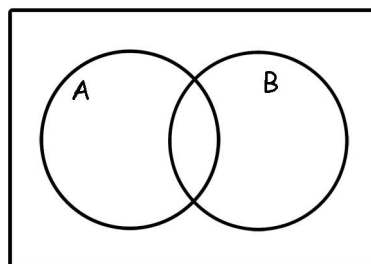
$$P(A/B) = P(A \cap B) / P(B)$$

Lo cual no aclara mucho las cosas a no ser que estés acostumbrado a este tipo de fórmulas. Olvídate de ella de momento, luego volveremos para explicar por qué esa fórmula es como es.

¿Qué significa "que ocurra A sabiendo que ha ocurrido B"? Volvamos a nuestro ejemplo de hombres y mujeres, ajedrecistas o no. "Ha ocurrido B" quiere decir que ya hemos escogido a una persona que juega al ajedrez. En ese grupo habrá hombres y mujeres. Es en ese grupo en el que tenemos que calcular la probabilidad de elegir un hombre (suceso A). En otras palabras, es como si tuviésemos a toda esa gente en una sala, sacáramos fuera a todos los que no jugaran al ajedrez, y luego viésemos cuál es la probabilidad de que entre las que quedan eligiésemos a un hombre.

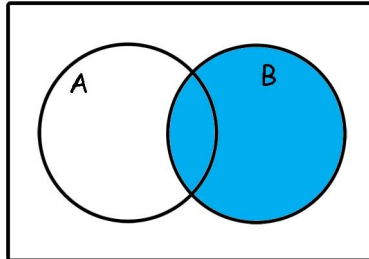
Fíjate que no es lo mismo "A sabiendo que ha ocurrido B" que "B sabiendo que ha ocurrido A". Este segundo caso (Que juegue al ajedrez sabiendo que es hombre) supondría sacar fuera de la habitación a todas las mujeres, y ver cuántos de los presentes juegan al ajedrez.

Veámoslo representado en un diagrama de doble círculo:

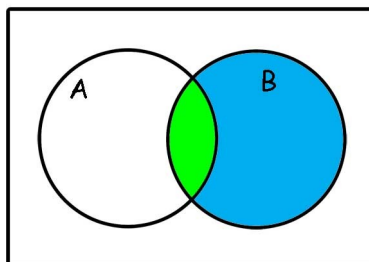


Cajón de Ciencias

Si empezamos con el hecho de que "sabemos que ha ocurrido B", eso quiere decir que nos quedamos solo con el área del segundo círculo:



Ahora, la "probabilidad de que ocurra A" dentro de esta zona, se corresponde con la zona en la que aparte de B, también existía A:



¿Te das cuenta de que esto lo podríamos plantear con la ley básica de Laplace, la de "casos favorables partido de casos posibles"? Los casos favorables son esa zona de intersección, mientras que los casos posibles (teniendo en cuenta, repetimos, de que nos quedamos dentro de B), es el área del segundo círculo. ¡Esa es la fórmula de antes! La intersección de A y B, partido de B ¿A que ahora la fórmula se entiende mejor? Al fin y al cabo, es otra forma de escribir, como hemos dicho, la Ley de Laplace...

Ejercicio de prueba: *tenemos el grupo de personas del ejemplo, y sabemos que en él hay un 45% de hombres, y un 60% de personas que juega al ajedrez. También sabemos que un 15% son hombres que juegan al ajedrez. Calcula:*

- La probabilidad de elegir al azar una mujer.*
- La probabilidad de elegir al azar una mujer que juegue al ajedrez.*
- La probabilidad de que la persona elegida, sabiendo que es mujer, juegue al ajedrez.*
- La probabilidad de que la persona elegida, sabiendo que juega al ajedrez, sea mujer.*

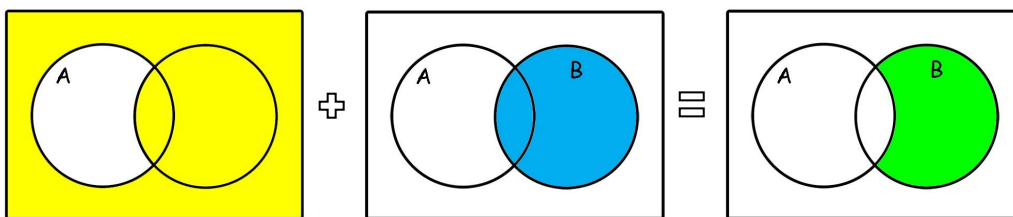
Cajón de Ciencias

Solución:

a) Ésta es muy facilita, solo para calentar motores. "Elegir mujer" es el suceso contrario a "elegir hombre", por lo que:

$$P(\neg A) = 1 - P(A) = 1 - 0,45 = 0,55$$

b) Aquí nos piden la intersección de "no A" con "B" (es decir, "mujer" y "juega al ajedrez"). Si representamos las probabilidades que conocemos en el diagrama de doble círculo, vemos que la solución es:



$$P(\neg A \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0,55 - 0,15 = 0,40$$

c) Ésta sí es la pregunta de probabilidad condicionada (elegir B sabiendo que ya ha ocurrido A). Se distinguen muy bien porque casi siempre tienen la coletilla "sabiendo que...". Recuerda que equivale a hacer salir a todos los hombres de la habitación (con lo que nos quedamos con el 60% del grupo original) y vemos cuál es la probabilidad de escoger a una mujer que juegue al ajedrez. Como tenemos calculado ya todo lo necesario, podemos ir directamente al ajo. Expresado matemáticamente es:

$$P(B/\neg A) = P(B \cap \neg A) / P(\neg A) = 0,40 / 0,55 = 0,73$$

d) Este apartado es para comprobar, como habíamos dicho antes, que no sale lo mismo si invertimos el orden de los términos. Ahora la intersección de sucesos ($B \cap \neg A$) la tenemos que dividir entre la probabilidad de ajedrecistas, que es de 0,60:

$$P(\neg A/B) = P(\neg A \cap B) / P(B) = 0,40 / 0,60 = 0,67$$

¡Recuerda!

La probabilidad condicionada no tiene la propiedad conmutativa ($P(A/B) \neq P(B/A)$) pero la intersección y la conjunción sí son conmutativas:

$$P(A \cap B) = P(B \cap A)$$

$$P(A \cup B) = P(B \cup A)$$