

# Cómo resolver ecuaciones de segundo grado

### ¿Qué es una ecuación de segundo grado?

Son aquellas en las que la incógnita aparece en algún punto elevada al cuadrado. Todas son del estilo de esta fórmula:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Y si no aparecen así, se pueden operar y retocar para que sigan esa fórmula:

$$x(x - 2) = 3 \rightarrow x^2 - 2x = 3 \rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$x^2 - 3x = -4 \rightarrow x^2 - 3x + 4 = 0$$

$$2(x^2 - 2x) = -2 \rightarrow 2x^2 - 4x + 2 = 0$$

Para resolver estas ecuaciones hay que recurrir a la siguiente fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Se siente, es que no hay más remedio. Ya sé que parece un poco liosa, pero cuando la hayas utilizado trescientas veces te saldrá sola.

Por supuesto, la  $a$ , la  $b$  y la  $c$  son la  $a$ , la  $b$  y la  $c$  de la expresión general de más arriba (con sus respectivos signos). El signo de  $\pm$  quiere decir que tendremos que hacer dos operaciones, primero haciendo una suma, y luego una resta.

Vamos a ver todo esto con un ejemplo. Cojamos la primera de las ecuaciones de segundo grado:

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

## Cajón de Ciencias

Sólo para que no haya ninguna duda: en esta ecuación, la  $a$  (lo que multiplica a la equis al cuadrado) vale 1; la  $b$  (lo que multiplica a la  $x$ ) vale -2 y la  $c$  vale -3. Llevemos estas cifras a la fórmula:

$$x = (2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}) / 2 \cdot 1$$

$$x = (2 \pm \sqrt{4 + 12}) / 2$$

$$x = (2 \pm \sqrt{16}) / 2$$

$$x = (2 \pm 4) / 2$$

Aquí es cuando tenemos que hacer una operación doble. Por un lado haremos  $(2+4)/2$  y por otro  $(2-4)/2$ . Nos salen, por lo tanto, dos soluciones.<sup>1</sup>

$$x_1 = (2 + 4) / 2 = 3$$

$$x_2 = (2 - 4) / 2 = -1$$

Probemos a resolver, sólo por curiosidad, la siguiente ecuación de segundo grado. El resultado es interesante:

$$x^2 - 3x + 4 = 0$$

$$x = (3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 1 \cdot 4}) / 2$$

$$x = (3 \pm \sqrt{9 - 16}) / 2$$

$$x = (3 \pm \sqrt{-7}) / 2$$

¿¿Qué?? ¿Una raíz *negativa*? Y ahora ¿cómo se sigue? Pues simplemente no se puede. Esta ecuación de segundo grado no tiene solución, y así lo tienes que indicar<sup>2</sup>.

<sup>1</sup> Vaya por delante que una ecuación tendrá un número de soluciones igual a su grado. Adivina cuántas soluciones obtendrías si supieras resolver ecuaciones de sexto grado.

<sup>2</sup> Nota para los puntillosos: por supuesto que se puede resolver. ¿No hemos dicho en la nota al pie anterior que había tantas soluciones como grado de la ecuación? Pero para resolver esto hace falta conocer un tipo de números llamados (no es broma) números complejos o imaginarios, que no se ven hasta Bachillerato.

## Cajón de Ciencias

Como con esta hemos terminado pronto, vamos a ver la tercera (vale, lo digo porque también tiene algo interesante):

$$2x^2 - 4x + 2 = 0$$

$$x = (4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 2 \cdot 2}) / 2$$

$$x = (4 \pm \sqrt{16 - 16}) / 2$$

$$x = (4 \pm \sqrt{0}) / 2$$

¿Qué ocurre aquí? Que cuando hagamos la operación doble en los dos casos nos saldrá igual, porque da lo mismo sumar cero que restar cero. Las dos soluciones son idénticas<sup>3</sup>.

$$x_1 = (4 + 0) / 2 = 2$$

$$x_2 = (4 - 0) / 2 = 2$$

### Ecuaciones de segundo grado incompletas

Existen algunas ecuaciones de segundo grado que no tienen todos los términos de la fórmula general. Fíjate en estas:

$$4x^2 - 64 = 0$$

$$x^2 - 3x = 0$$

En realidad no les faltan términos: la primera es  $4x^2 + 0x - 64 = 0$  y la segunda  $x^2 - 3x + 0 = 0$ . Los matemáticos son gente realmente detallista. Incluso pueden resolverse con la fórmula de siempre (en el primer caso, la  $b$  vale cero, y en el segundo, la  $c$  vale cero). Pero a efectos prácticos, si las tratamos como “incompletas”, verás que existen formas alternativas de resolverlas, que no requieren el uso de la fórmula<sup>4</sup>.

<sup>3</sup> A veces se dice que estas ecuaciones sólo tienen una solución, pero eso no es exacto. Al igual que todas las ecuaciones de segundo grado, tienen *dos*, aunque ambas valgan lo mismo.

<sup>4</sup> Lo cual no significa que no te la tengas que aprender.

## Cajón de Ciencias

- Ecuaciones de segundo grado sin la  $b$

Para estas despejaremos la  $x^2$ . Luego pasaremos el cuadrado al otro lado transformándolo en su operación contraria: la raíz cuadrada. Por último, resolvemos la raíz cuadrada. Recuerda que las raíces cuadradas tienen dos resultados, uno con signo positivo y otro negativo:

$$\begin{aligned}4x^2 - 64 &= 0 \\4x^2 &= 64 \\x^2 &= 64/4 \\x^2 &= 16 \\x &= \sqrt{16} \\x &= \pm 4\end{aligned}$$

- Ecuaciones de segundo grado sin la  $c$

Para resolver estas, sacaremos factor común al lado de la ecuación que tenga las equis.

$$\begin{aligned}x^2 - 3x &= 0 \\x(x - 3) &= 0\end{aligned}$$

Ahora hacemos el siguiente razonamiento: si  $x(x - 3)$  es igual a cero, una de las dos cosas que está multiplicando tiene que ser igual a cero. Hay, por lo tanto, dos posibilidades:

$$\begin{aligned}x &= 0 \\x - 3 &= 0\end{aligned}$$

De ahí salen nuestras dos soluciones:

$$\begin{aligned}x_1 &= 0 \\x_2 &= 3\end{aligned}$$

Este último tipo de ecuaciones de segundo grado incompletas tiene un par de peculiaridades. Primero: una solución siempre es igual a cero. Y segundo, siempre tienen dos soluciones distintas.