

## Integrales indefinidas 1: ejercicios resueltos

a)  $\int (3x+2)^3 dx$

b)  $\int (1+x)^2/\sqrt{x} dx$

c)  $\int (x+1)/(x+2) dx$

d)  $\int x^2 \operatorname{Ln} x dx$

e)  $\int x \sqrt{1+x} dx$

f)  $\int \operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^2 x dx$

g)  $\int dx/(x \sqrt{1-x})$

h)  $\int (dx/(\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}))$

i)  $\int (1+\operatorname{tag} x)^2 dx$

j)  $\int dx/(x^2 \sqrt{4+x^2})$

# Cajón de Ciencias

## Soluciones

$$a) \int (3x+2)^3 dx = 1/3 \int 3(3x+2)^3 dx = 1/3((3x+2)^4)/4 + C$$

$$b) \int (1+x)^2/\sqrt{x} dx = \int ((1+2x+x^2)/x^{1/2}) dx = \int (1/x^{1/2}) dx + 2 \int (x/x^{1/2}) dx + \int (x^2) dx = \\ = 2\sqrt{x} + 4/3 \text{root } 3/2 x + 2/5 \text{root } 5/2 x + C$$

$$c) \int (x+1)/(x+2) dx = \int (1+1/(x+1)) dx = x + \ln(x+1) + C$$

$$d) \int x^2 \ln x dx$$

$$u = \ln x \quad du = dx/x \\ dv = x^2 dx \quad v = x^3/3$$

$$\int x^2 \ln x dx = \ln x \cdot x^3/3 - \int x^3/3x dx = \ln x \cdot x^3/3 - 1/9x^3 + C$$

$$e) \int x \sqrt{1+x} dx$$

$$u = x \quad du = dx \\ dv = \sqrt{1+x} dx \quad v = 2/3(1+x)^{3/2}$$

$$\int x \sqrt{1+x} dx = x \cdot 2/3(1+x)^{3/2} - \int 2/3(1+x)^{3/2} dx = x \cdot 2/3(1+x)^{3/2} - 4/5(1+x)^{5/2} + C$$

$$f) \int \sin^2 x \cdot \cos^2 x dx = 1/4 \int \sin^2 2x dx = 1/8 \int (1 - \cos 4x) dx = 1/8x - 1/32 \sin(4x) + C$$

$$g) \int dx/(x \sqrt{1-x})$$

$$\text{Hacemos el cambio de variable } (1-x) = z^2 \quad \rightarrow \quad dx = -2z dz$$

$$\int dx/(x \sqrt{1-x}) = \int (-2z dz / (z(1-z^2))) = -2 \int (dz/(1-z^2)) = -\ln(1+z)/(1-z) + C$$

Deshacemos el cambio de variable:

$$-\ln(1+z)/(1-z) + C = \ln(1-\sqrt{1-x})/(1+\sqrt{1-x}) + C$$

## Cajón de Ciencias

h)  $\int dx/(\sqrt{x}-\sqrt[4]{x})$

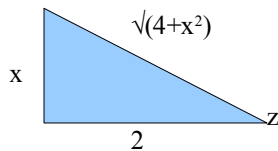
Hacemos el cambio de variable  $x = z^4$ , tendremos  $dx = 4z^3 dz$

$$\int dx/(\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}) = \int 4z^2 dz/(z^2-z) = 4 \int z^2 dz/(z-1) = 4 \int (z+1+1/(z-1)) dz =$$
$$= 4(1/2z^2 + z + \ln(z-1)) + C = 2\sqrt{x} + 4\sqrt[4]{x} + \ln(\sqrt[4]{x}-1) + C$$

i)  $\int (1+\operatorname{tag}x)^2 dx = \int (1+2\operatorname{tag}x+\operatorname{tag}^2 x) dx = \int (\sec^2 x + 2\operatorname{tag}x) dx = \operatorname{tag}x + 2\operatorname{Ln} \sec x + C$

j)  $\int dx/(x^2\sqrt{4+x^2})$

Hacemos el cambio de variable  $x = 2\operatorname{tag} z$  tendremos  $dx = 2\sec^2 z dz$  y  $\sqrt{4+x^2} = 2 \sec z$  (fíjate en el triángulo más abajo)



Dirás que este cambio de variable es muy extraño, y es cierto. Es raro (por no decir prácticamente imposible) que se te ocurra por sí solo, a no ser que hayas hecho antes algún ejercicio en el que se aplique. La pista que te puede indicar que hay que aplicar este cambio de variable tan particular, es la presencia de una raíz con dos cosas que se están sumando, y que curiosamente cada una de esas dos cosas son el cuadrado perfecto de algo. Fíjate que 4 es  $2^2$  (y lo asignamos a uno de los catetos) y  $\sqrt{x^2}$  es el otro cateto (de esta manera se cumple el teorema de Pitágoras, compruébalo si quieres en el triángulo de arriba).

$$\int dx/(x^2\sqrt{4+x^2}) = \int 2 \sec^2 z dz / (4 \operatorname{tag}^2 z \cdot 2 \sec z) = 1/4 \int (\sec z / \operatorname{tag}^2 z) dz =$$
$$= 1/4 \int \operatorname{sen}^{-2} z \operatorname{cos} z dz = -1/(4 \operatorname{sen} z) + C = -\sqrt{4+x^2}/4x + C$$