Límites e indeterminaciones

La idea de límite de una función no es en sí complicada, pero hubo que esperar hasta el siglo XVII a que los matemáticos Newton[1] y Leibniz[2] le dieran forma y la convirtiesen en una poderosa herramienta, que permite incluso operar con conceptos como el infinito.

¿Qué es el límite de una función? En realidad, hay que hablar siempre del límite de la función *en un punto* (o en el infinito), que es el valor al que se va acercando la función a medida que damos valores cada vez más cercanos a ese punto. Veámoslo con algunos ejemplos:

$\text{Lim}_{x\to 3}\ x^2 - 4$

f (2,9) = 4,41
f (2,999) = 4,994
f (2,99999) = 4,999

Está claro que el límite de la función cuando ésta tiende a 3 es 5.

$\text{Lim}_{x\to\infty}\ 2/x$

f (100) = 0,02
f (10000) = 0,0002
f (1000000) = 0,000002

Y aquí puede verse que si ponemos números cada vez más grandes, el resultado se parecerá cada vez más a cero.

En la práctica, no hace falta que demos tantos valores. Podemos utlizar el valor que nos indica el límite simplemente porque se acepta que, a base de dar valores infinitamente cercanos, llegaríamos al mismo resultado. Salvo en excepciones que veremos dentro de poco (siempre hay excepciones, claro).

Pero antes de seguir, un par de aclaraciones para los que no estéis acostumbrados a trabajar con el infinito (∞). Es un concepto un poco abstracto, y deberías ser capaz de entender y realizar al menos estas sencillas operaciones:

- Sumar un número u otro infinito a infinito da como resultado infinito.

$$\infty + 120 = \infty$$
$$\infty + \infty = \infty$$

1 Que también era físico, como seguramente ya sabes.
2 Que también era filósofo. Antiguamente la gente tendía a ser muy polifacética.

- Multiplicar infinito por un número o elevar infinito a un número positivo da como resultado infinito.

$$22 \cdot \infty = \infty$$
$$\infty^5 = \infty$$

- Dividir un número entre infinito da como resultado cero. Piensa a cuánto tocarían los miles de millones de habitantes de la Tierra si hubiese que repartir entre ellos un trozo de pan.

$$4/\infty = 0$$

- Elevar infinito a un número negativo da como resultado cero, porque un exponente negativo equivale a colocar la base en el denominador.

$$\infty^{-3} = 1/\infty^3 = 1/\infty = 0$$

- Existe un $+\infty$ y un $-\infty$, según tengamos números positivos o negativos infinitamente grandes. Operar con sus signos sigue los mismos criterios que los números normales. Es decir, más por más es más, menos por menos es menos y menos por menos es más.

Indeterminaciones

Según lo visto hasta ahora ¿cuánto valdrían los siguientes límites?

1) $\text{Lim}_{x\to 2} \quad (x-3)/(x^2-4)$

2) $\text{Lim}_{x\to 3} (x^2 - 9)/(x^2 - 2x - 3)$

3) $\text{Lim}_{x\to\infty} (x^2 - 5)/(x + 2)$

4) $\text{Lim}_{x\to\infty} \quad \sqrt{x^2-2}-x$

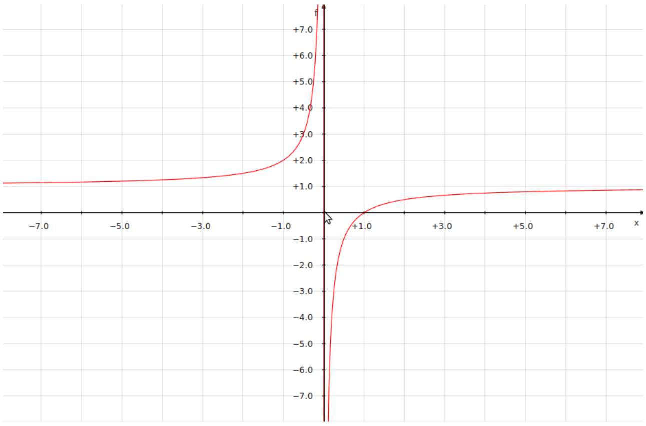
5) $\text{Lim}_{x\to\infty} [(2x+1)/(2x+4)]^x$

En todos estos casos nos encontramos con una dificultad de uno u otro tipo, ya sea por conducir a una operación imposible como un número dividido entre cero, o a expresiones extrañas como ∞/∞. Todas estas "dificultades" se denominan **indeterminaciones**, y cada tipo de indeterminación se resuelve de una manera distinta. Veámoslas una por una.

1) Indeterminación k/0

Si un límite nos lleva a un resultado de número dividido entre cero, tenemos una indeterminación. La causa de ello es que el límite se sitúa en un punto que no existe en el dominio de la función. Por lo tanto, **no existe límite en ese punto porque no existe ese punto.** Lo único que podemos (y debemos) hacer en estos casos es mirar a qué tiende la función cuando se acerca (aunque nunca llegue) al punto por la izquierda y por la derecha. Es lo que se llaman **límites laterales.**

Para que entiendas mejor este concepto, debes saber que las funciones en las que se da esto tienen en su representación algo como esto (no se corresponde con la gráfica de la función de ejemplo, pero es un caso parecido):



Si ya has estudiado lo que son las asíntotas verticales, esto te sonará. El caso es que, como puedes ver, a ambos lados del "valor prohibido" la función siempre tiende o bien a + ∞ o bien a - ∞. Lo único que tenemos que estudiar es cuál es el signo de la función a ambos lados del punto que nos pide el límite.

<u>Límite de f(x) cuando x tiende a 2 por la izquierda</u>: damos a la x el valor 1,99, por ejemplo. Colocamos sólo el signo del numerador y del denominador (no nos interesa el resultado exacto, sólo el signo):

f(1,99) = - / - = +

$\lim_{x\to 2^-} (x-3)/(x^2-4) = +\infty$

<u>Límite de f(x) cuando x tiende a 2 por la derecha</u>: el método es el mismo, pero damos un valor cercano a 2 y a la derecha de éste (por ejemplo, el 2,001):

f(2,001) = - / + = -

$\lim_{x\to 2^+} (x-3)/(x^2-4) = -\infty$

Esta sería la solución de nuestra indeterminación.

2) Indeterminación 0/0

Si dividir un número entre cero es una operación "prohibida", dividir cero entre cero lo será con más motivo. Si nuestro límite nos lleva a esto, hay una forma para solucionar la situación. Miremos el límite que nos sirve de ejemplo:

$$\text{Lim}_{x\to 3} (x^2 - 9)/(x^2 - 2x - 3) = 0/0$$

Pues bien, el modo de resolver estos límites es factorizar los polinomios de numerador y del denominador (repasa cómo se factorizan polinomios si no te acuerdas). Encontrarás siempre que hay un factor que se repite tanto arriba como abajo, y que es además el factor (x - k) donde k es el punto de nuestro límite[3].

$$\text{Lim}_{x\to 3} (x^2 - 9)/(x^2 - 2x - 3) = \text{Lim}_{x\to 3} [(x+3)(x-3)/(x-3)(x+1)]$$

Si simplificamos, desaparecerá la indeterminación.

$$\text{Lim}_{x\to 3} [(x+3)\cancel{(x-3)}/\cancel{(x-3)}(x+1)] = \text{Lim}_{x\to 3} (x+3)/(x+1) = 6/4 = 3/2$$

Puede ocurrir que, después de quitar la indeterminación, nos quede un límite tipo k/0, que es el primer tipo de indeterminación y ya hemos visto cómo resolver.

3) Indeterminación ∞/∞

Este tipo de indeterminación es uno de los más comunes. ∞/∞ es una expresión que no se puede operar (¡no es igual a uno!), pero mediante un paso intermedio podemos hacer que esta indeterminación desaparezca. Vamos a ver no uno, sino tres ejemplos. En cada uno de ellos, para resolver la indeterminación, vamos a dividir todos los términos del numerador y todos los términos del denominador por la equis con mayor grado que haya en el denominador[4] (recuerda que dividir un número entre ∞ es igual a cero):

[3] De hecho, es precisamente el factor (x-k) el que convierte numerador y denominador en cero cuando la x tiende a k.
[4] Esto no se hace porque sí. Es como si simplificaras una fracción. Dividir numerador y denominador por lo mismo es una operación válida.

Ejemplo 1:

$\text{Lim}_{x\to\infty} (x^2 - 5)/(x + 2) =$

$\text{Lim}_{x\to\infty} (x^2/x - 5/x)/(x/x + 2/x) = \text{Lim}_{x\to\infty} (x - 5/x)/(1 + 2/x) = (\infty - 0)/(1 + 0) = +\infty$

Ejemplo 2:

$\text{Lim}_{x\to\infty} (x - 5)/(x^3 + 4) =$

$\text{Lim}_{x\to\infty} (x/x^3 - 5/x^3)/(x^3/x^3 + 4/x^3) = \text{Lim}_{x\to\infty} (1/x^2 - 5/x^3)/(1 + 4/x^3) = (0 - 0)/(1 + 0) = 0$

Ejemplo 3:

$\text{Lim}_{x\to\infty} (2x^2 - 6)/(x^2 + 9) =$

$\text{Lim}_{x\to\infty} (2x^2/x^2 - 6/x^2)/(x^2/x^2 + 9/x^2) = \text{Lim}_{x\to\infty} (2 - 6/x^2)/(1 + 9/x^2) = (2 - 0)/(1 + 0) = 2$

Estos son los tres resultados básicos de este tipo de indeterminación: $\pm\,\infty$, cero o un número. ¿Captas alguna diferencia entre los tres ejemplos que se relacione con los tres posibles resultados? Si no lo ves, fíjate en lo siguiente:

- Si el grado del numerador es mayor que el del denominador, el resultado será $+\infty$ o $-\infty$, según los signos y exponentes.

- Si el grado del numerador es menor que el del denominador, el resultado es cero.

- Si el grado del numerador y denominador son iguales, el límite es igual a la división de los coeficientes de las equis de mayor grado arriba y abajo.

Sabiendo esto, ¡eres capaz de calcular este tipo de indeterminaciones a ojo! Eso sí, si tu profesor te lo pide, tendrás que desarrollar el paso intermedio que justifica el resultado, pero al menos sabrás de antemano cuánto te debe dar.

¡OJO!: las raíces afectan al rango del numerador o denominador. Una equis a la cuarta dentro de una raíz cuadrada es en realidad un grado 2. Acuérdate que las raíces son exponentes fraccionarios, por lo que $\sqrt{x^4}$ equivale a $x^{4/2}$ ¡ten cuidado con estos detalles!

4) Indeterminación ∞ - ∞

Infinito menos infinito no se puede operar. NO ES IGUAL A CERO, que quede claro. Es una indeterminación como Dios manda. Una vez remarcado esto, ¿cómo se resuelve?

En estos casos, el método es multiplicar por una fracción cuyo numerador y denominador sean iguales (y por lo tanto es como si multiplicáramos por uno) y a su vez iguales al conjugado de la función. Recuerda que el conjugado es la misma expresión pero cambiando el signo central: si teníamos (A - B), multiplicaremos por (A+B)/(A+B). Así conseguimos que en el numerador tengamos una diferencia de cuadrados.

¿Qué conseguimos con esto? Fíjate en el desarrollo del límite:

$$\text{Lim}_{x\to\infty} \sqrt{x^2-2}-x = \text{Lim}_{x\to\infty} \sqrt{x^2-2}-x \cdot (\sqrt{x^2-2}+x)/(\sqrt{x^2-2}+x) =$$

$$= \text{Lim}_{x\to\infty} [\sqrt{x^2-2}^{\,2} - x^2]/(\sqrt{x^2-2}+x) = \text{Lim}_{x\to\infty} (x^2 - 2 - x^2)/(\sqrt{x^2-2}+x) =$$

$$= \text{Lim}_{x\to\infty} (-2)/(\sqrt{x^2-2}+x)$$

El límite del numerador es -2, y el del denominador es ∞, así que nuestro límite total es igual a cero. También puede ocurrir que después de multiplicar arriba y abajo por el conjugado, transformemos todo en una indeterminación de ∞/∞, que ya sabemos cómo se resuelven (y que además son bastante fáciles).

5) Indeterminación 1^∞

Este es un tipo de indeterminación bastante particular. Cualquier función cuyo límite sea de este tipo es en realidad una variante de

$$(1 + 1/x)^x$$

Ahí donde la ves, tan inofensiva en apariencia, se trata de una función importantísima en matemáticas y cuyo límite es uno de esos números que se han hecho famosos por méritos propios y del cual se han escrito libros enteros. Estamos hablando del número *e*.

$$e = 2{,}718281828459045235 4...$$

Puedes comprobarlo tú mismo, dando a la *x* valores cada vez más grandes. Verás que consigues números cada vez más cercanos a *e*.

Para resolver esta indeterminación recurrimos a la siguiente fórmula, donde el límite de f(x) sería 1 y el de g(x) infinito. Es un poco más complicado, pero, a cambio, estas indeterminaciones son muy fáciles de detectar, porque son las únicas que tienen exponente.

$$\text{Lim}_{x\to\infty} f(x)^{g(x)} = e^{\text{Lim } x \to \infty\ f(x)\cdot g(x)}$$

Resolvemos de este modo nuestro límite de ejemplo:

$$\text{Lim}_{x\to\infty} [(2x+1)/(2x+4)]^x$$

(Fíjate que el límite de la base es a su vez una indeterminación de infinito partido infinito, con los grados del numerador y denominador iguales. Resolviéndola como hemos visto antes, te tiene que salir que ese límite vale 1).

$$\text{Lim}_{x\to\infty} [(2x+1)/(2x+4)]^x = e^{\text{Lim } x\to\infty\ x[(2x+1)/(2x+4)]} = e^{\infty} = \infty$$

Resumiendo, tienes que tener claro los tipos de indeterminaciones que te puedes encontrar, y conocer el método que se aplica en cada uno (sólo son seis, no son tantos).