Límites y continuidad: ejercicios resueltos

Ejercicio 1: Estudia la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)/(x+1) & \text{si } x<=0 \\ x^2 - 1 & \text{si } x>0 \end{cases}$$

Solución:

Para estudiar la continuidad de cualquier función, lo primero es comprobar si tiene valores de x que no estén en el dominio. Por ejemplo, la función (x-1)/(x+1) no tiene dominio en x= (-1). ¿Este valor se usaría para esta parte de la función compuesta? En este caso sí, porque la función (x-1)/(x+1) se usa si x<=0. Esto quiere decir que la función f(x) tiene al menos un punto de discontinuidad en x= (-1). Dejémoslo de momento de lado; luego estudiaremos la continuidad en este punto.

¿Hay algún punto fuera de dominio en la otra función, en x^2 - 1? No, porque las funciones polinómicas tienen dominio en todo R.

¿Hay otro punto posible de discontinuidad? En x=0 f(x) cambia de una función a otra, y por lo tanto es otra posible discontinuidad.

En cada punto de discontinuidad hay que hallar los límites laterales. Los casos posibles son los siguientes:

a) Si los límites laterales y el límite en el punto son iguales, la función es continua.
b) Si los límites laterales son iguales, pero distintos del límite en el punto, la función tiene una discontinuidad evitable (se llama así porque la discontinuidad se evitaría tan sólo con que el valor de la funcióin en el punto fuera otro).
c) Si los límites laterales son distintos, se trata de una discontinuidad inevitable de salto (se llama así porque la distancia que separa los dos extremos no continuos es un “salto” de un número a otro)
d) Si uno de los límites no existe, se trata de una discontinuidad inevitable de segunda especie o de salto infinito (uno de los extremos se pierde en el infinito, y el extremo siguiente lo mismo).

Empecemos con x= (-1):

$$\lim_{x \to (-1)^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to (-1)^+} f(x) = -\infty$$

Por lo tanto, se trata de una discontinuidad inevitable de salto.

Y ahora con x=0

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = (-1)$$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = (-1)$

$f(0) = (-1)$

Por lo tanto, la función es continua en el punto x=0.

Ejercicio 2: Estudia la continuidad de la función según los valores de los parámetros a y b:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 - 2x & \text{si } x<1 \\ bx-1 & \text{si } 1<=x<3 \\ b/x & \text{si } x=>3 \end{cases}$$

Solución:

Aunque aparezcan "letras" o parámetros, estos problemas se resuelven del mismo modo que el resto.

Lo primero, como antes y como siempre, comprobar si hay puntos fuera de dominio. En este caso el único posible sería x=0 en la tercera función, pero el cero no se utiliza en esa, sino en la primera, y por lo tanto no hay que preocuparse de él.

Los otros posibles puntos de discontinuidad son aquellos en los que f(x) cambia de una función a otra, es decir, en x=1 y x=3. Veamos, por lo tanto, cuáles son los límites laterales en cada uno de esos puntos:

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = a-2$

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = b-1$

Si la función fuera continua en x=1, los límites laterales tendrían que ser iguales, y por lo tanto a-2=b-1. Tenemos dos incógnitas, pero no importa, sigamos con el ejercicio.

$\lim_{x \to 3^-} f(x) = 3b-1$

$\lim_{x \to 3^+} f(x) = b/3$

De nuevo, si la función fuera continua en x=3, los límites laterales serían iguales, y
3b-1= b/3. Esta ya es una ecuación de primer grado con una incógnita, que podemos resolver. De ella sacamos que b=3/8. Y si b=3/8, podemos sacar el valor de a, de la ecuación anterior. a=11/8

La solución del problema es que la función es continua si a=11/8 y b=3/8. En cualquier otro caso, la función es discontinua, con discontinuidad inevitable de salto.