Polinomios

¿Qué es un polinomio?

Si ya sabes lo que es un monomio, poco más hay que explicar: un polinomio es un conjunto de varios monomios que no pueden operarse entre sí.

Si aún no sabes lo que es un monomio (¡muy mal!) te recordamos que es una expresión que tiene una parte numérica y otra literal. Antes de seguir con esto, deberías mirar la parte los monomios y sus operaciones.

Un polinomio ejemplo sería este:

$$6x^3 – 4x^2 + 3x -1$$

Está compuesto por cuatro monomios, y como cada uno de ellos tiene distinta parte literal: no pueden realizarse más operaciones. Para el futuro, un par de consejos: cuando te den una expresión polinómica, mira si hay términos que se puedan juntar, y ordena todos los monomios de mayor a menor grado. Es decir, convierte esto

$$4x^2 – 3x + 2x^3 + 6x^2 +4$$

En esto

$$2x^3 + 10x^2 – 3x + 4$$

Te ayudará mucho al realizar las operaciones con polinomios que veremos a continuación.

Y por cierto, UN POLINOMIO NO ES UNA ECUACIÓN. Aunque tenga equis (o cualquier otra letra) no vas a tener que calcularla. Más que nada porque mientras no haya una igualdad entre dos expresiones es algo que no se puede hacer.

Grado de un polinomio

El grado de un polinomio es el del monomio con mayor grado (ya te avisamos que había que tener claro todo lo relacionado con monomios). Algunos ejemplos:

$3x^5 – 4x + 2$ → grado 5
$-2x^2 + 3x + 6x^3 – 4$ → grado 3 (ojo con los polinomios desordenados)
$6x^8 – 2$ → grado 8

Valor numérico de un polinomio

El valor numérico de un polinomio para un determinado valor es lo que nos daría ese polinomio si cambiáramos la equis (o la letra de turno) por la cifra que nos dan. Por ejemplo, el valor numérico del polinomio $P(x) = 3x^5 – 4x + 2$ para $x=1$ sería:

$$P(1) = 3\cdot 1^5 – 4\cdot 1 + 2 = 1$$

Tan sencillo como esto.

Operaciones con polinomios: multiplicar un número por un polinomio.

Cuando tenemos un número que multiplica a todo un polinomio, hacemos el producto del número por cada uno de los términos del polinomio:

$$4\cdot(2x^4 – x^2 + 3) = 8x^4 – 4x^2 + 12$$

Suma y resta de polinomios

Nos limitamos a juntar los dos polinomios y agrupar los términos que sean semejantes (tengan la misma parte literal). ATENCIÓN: cuando hacemos una resta, el signo menos afecta a TODO el segundo polinomio:

$$(x^5 + 3x^3 – 2x^2 + x – 1) + (-2x^5 + x^4 + 4x^2 -3x + 2) = -x^5 + x^4 + 3x^3 + 2x^2 – 2x +1$$

$$(x^3 – 3x^2 + x – 1) – (x^3 – 2x^2 + 3x + 4) = x^3 – 3x^2 + x – 1 – x^3 + 2x^2 - 3x – 4 = -x^2 -2x - 5$$

Producto de polinomios

El producto de polinomios no es difícil de entender, pero debido a la cantidad de términos, signos, números y equis que terminan apareciendo, es una de las mayores fuentes de errores en el álgebra. Por lo tanto, acostúmbrate a realizar estas cuentas con la atención y el cuidado de un cirujano que estuviera operando.

El método, como hemos dicho, es bastante sencillo. Cada monomio del primer polinomio debe multiplicarse por todos y cada uno de los monomios del segundo. Coge la rutina de seguir siempre un mismo orden: primero por primero, primero por segundo, primero por tercero, etc. También ayuda que los dos polinomios tengan sus términos ordenados por exponentes. Un ejemplo:

$$(x^3 - 2x^2 + x - 1)\,(3x^2 - x + 2) = 3x^5 - x^4 + 2x^3 - 6x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 3x^3 - x^2 + 2x - 3x^2 + x - 2$$

Como se trata de un polinomio de cuatro términos por otro de tres, nos tienen que salir doce resultados. Cuéntalos para asegurarte que no se ha quedado nada por multiplicar.

¿Ya? Pues lo único que queda es agrupar los términos semejantes (monomios con la misma parte literal). También aquí aconsejamos que sigas un orden desde los exponentes mayores a los menores:

$$3x^5 - x^4 + 2x^3 - 6x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 3x^3 - x^2 + 2x - 3x^2 + x - 2 = 3x^5 - 7x^4 + 7x^3 - 8x^2 + 3x - 2$$

Cociente de polinomios

Hay dos formas de dividir polinomios: una corta y otra larga. Aquí vamos a ver la larga. No se debe a ningún motivo sádico o malintencionado, sino a que la forma larga sirve en todas las situaciones, y la corta sólo cuando el polinomio divisor es del tipo $(x \pm a)$. Además, si tienes curiosidad por esta otra forma, siempre puedes echar un vistazo al documento que se refiere al método de Ruffini.

Bueno, vamos con la forma larga. Partamos de estos dos polinomios:

$$P(x) = 2x^4 - 3x^2 + x - 4 \qquad \text{entre} \qquad Q(x) = x^2 - x$$

En primer lugar, vamos a comprobar que el polinomio "dividendo" (que va a ser P(x)) está completo. Como en nuestro ejemplo no lo está, "rellenamos" con un término de equis al cubo[1]:

$$P(x) = 2x^4 + 0x^3 - 3x^2 + x - 4$$

[1] Cuando tengas experiencia, este paso no es necesario. Aún así, debes estar atento a los términos que falten.

Y ahora colocamos los dos polinomios como si se tratase de una división normal:

$$2x^4 + 0x^3 - 3x^2 + x - 4 \quad \underline{|x^2 - x \qquad}$$

Como nuestro polinomio divisor tiene dos términos, cogemos dos términos del polinimo dividendo:

$$\overbrace{2x^4 + 0x^3} - 3x^2 + x - 4 \quad \underline{|x^2 - x \qquad}$$

El siguiente paso es colocar en el cociente algo que, al mutiplicarlo por el primer término del divisor, nos dé exactamente el primer término del dividendo. Luego multiplicamos lo que hemos colocado en el cociente por el divisor y ponemos el resultado bajo el dividendo:

$$\begin{array}{ll}
\overbrace{2x^4 + 0x^3} - 3x^2 + x - 4 & \underline{|x^2 - x \qquad} \\
2x^4 - 2x^3 & \;2x^2
\end{array}$$

Cambiamos el signo a lo último que hemos escrito y efectuamos la operación. El primer término de esa resta se nos tiene que ir siempre (que para eso hemos hecho que dé lo mismo):

$$\begin{array}{ll}
\overbrace{\cancel{2x^4} + 0x^3} - 3x^2 + x - 4 & \underline{|x^2 - x \qquad} \\
\underline{\cancel{-2x^4} + 2x^3} & \;2x^2 \\
\qquad 2x^3 &
\end{array}$$

Después, al igual que hacíamos con las divisiones normales, bajamos un término y seguimos operando. La división completa quedaría así:

$$\begin{array}{ll}
\overbrace{\cancel{2x^4} + 0x^3} - 3x^2 + x - 4 & \underline{|x^2 - x \qquad} \\
\underline{\cancel{-2x^4} + 2x^3} & \;2x^2 + 2x - 5 \\
\qquad \cancel{2x^3} - 3x^2 & \\
\qquad \underline{\cancel{-2x^3} - 2x^2} & \\
\qquad\qquad \cancel{-5x^2} + x & \\
\qquad\qquad \underline{\cancel{+5x^2} + 5x} & \\
\qquad\qquad\qquad 6x - 4 &
\end{array}$$

Cuando llegamos al término sin equis en el cociente, la división se termina. Lo que nos queda debajo (*6x – 4*) es el resto. Y en estas divisiones no se pueden sacar decimales (¡yupi!).

Puede parecer complicado, pero no lo es tanto. Lo que sí es cierto es que tienes que tener mucho cuidado con las operaciones, porque es fácil equivocarse al multiplicar o sumar.

Para terminar con las divisiones de polinomios, fíjate en unos cuantos detalles:

→ El grado del cociente va a ser igual al grado del dividendo menos el del divisor.

→ Los exponentes en el cociente van disminuyendo de uno en uno. Si el último término que escribiste fue una equis al cubo, el siguiente será una equis al cuadrado.

→ Se puede hacer la prueba de la división, si tienes tiempo. Es igual que en las divisiones normales: cociente por divisor, más el resto, debe dar igual que el dividendo.

Y para el final, polinomios elevados a un exponente: igualdades notables

Que nadie se asuste: no vamos a ver operaciones de este estilo

$$(3x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 3x - 8)^5$$

Conocer cómo hacer esta operación no es difícil (¡en serio!). Basta hacer cuatro veces una multiplicación de polinomios, cosa que ya sabemos. Eso sí, el tamaño de polinomio que nos saldría haría recomendable que comprásemos unas cuantas cartulinas tamaño mural, y disponer de un buen rato libre y varios bolis bien cargados de tinta.

No, lo que explicaremos será algo llamado "igualdades notables", dos exponentes y un producto que son "típicos" y que si nos aprendemos qué resultado dan, nos podemos ahorrar tiempo. Son los siguientes:

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$
$$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$
$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Cambiando *a* y *b* por cualquier otra letra o número, sacamos rápidamente cuánto vale un determinado binomio al cuadrado o un producto de un binomio por su conjugado[2].

Si andáis faltos de espacio en memoria, no es *imprescindible* aprenderse estas igualdades. En el caso de no acordarnos que $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$, podemos hacer en un momento el producto $(a+b)(a+b)$ y comprobaremos que nos da el mismo resultado.

[2] Para los que anden despistados, un binomio es un polinomio de dos términos, y el "conjugado" es un binomio gemelo de otro, sólo que cambiando el símbolo central de suma por uno de resta o viceversa.