Vectores: ejercicios resueltos

1) Calcula el módulo de los siguientes vectores:

a) (3,-5)
b) (-4,-12)
c) el vector que une los puntos A(3,-1) y B(-2,5)

2) Halla el vector director de la recta r $\equiv$ 2x – 3y + 3 = 0 y calcula su coseno director.

3) Halla el vector unitario equivalente a los vectores u(-6,8) y v(4,5).

4) Halla el ángulo que forman entre sí las siguientes parejas de vectores:

a) (-4,3) y (5,5)
b) (3,0) y (-4,6)
c) (2,1) y (1, -2)

5) Expresa en forma polar los vectores que aparecen en el ejercicio 1.

Soluciones

1) *Calcula el módulo de los siguientes vectores:*

Para calcular el módulo de un vector lo que tenemos que hacer es colocar sus coordenadas como si fueran los catetos de un triángulo rectángulo y aplicar el teorema de Pitágoras: el módulo es la hipotenusa de dicho triángulo:

$$|v| = \sqrt{x^2+y^2}$$

a) *(3,-5)*

$|v| = \sqrt{3^2+(-5)^2}=\sqrt{34}$

b) *(-4,-12)*

$|v| = \sqrt{(-4)^2+(-12)^2}=\sqrt{160}$

c) *el vector que une los puntos A(3,-1) y B(-2,5)*

Primero calculamos el vector restando las coordenadas de ambos puntos, y luego procedemos como en los casos anteriores.

AB = (-2,5) – (3,-1) = (-5,6)

$|AB| = \sqrt{(-5)^2+6^2}=\sqrt{61}$

2) *Halla el vector director de la recta r $\equiv$ 2x – 3y + 3 = 0 y calcula sus cosenos directores.*

Para calcular el vector director sacamos dos puntos cualesquiera de la recta, y los restamos como hemos visto en el apartado c) del ejercicio anterior. Para los valores de x = 0 y x = 3 obtenemos los puntos (0,1) y (3,3), que al restarlos nos dan el vector (3,2).

Los cosenos directores son los ángulos que forma el vector con los vectores de la base, el (0,1) y el (1,0). Se calculan con las siguientes expresiones:

$$\cos\alpha = x/\sqrt{x^2+y^2} \quad \cos\beta = y/\sqrt{x^2+y^2}$$

Si te fijas, lo que hace cada expresión es dividir la coordenada x o y entre el módulo del vector. Para el vector de nuestro ejercicio, sería:

$$\cos\alpha = 3/\sqrt{3^2+2^2} = 3/\sqrt{13}$$

$$\cos\beta = 2/\sqrt{3^2+2^2} = 2/\sqrt{13}$$

3) *Halla el vector unitario equivalente a los vectores u(-6,8) y v(4,5).*

Vector unitario es aquel cuyo módulo vale 1. Si un vector determinado tiene un módulo distinto de 1, puede convertirse en unitario simplemente dividiendo cada una de sus coordenadas entre su módulo.

|u| = $\sqrt{(-6)^2+8^2} = \sqrt{100} = 10$

Si quieres, puedes comprobar que el vector (-6/10, 8/10) tiene módulo 1:

$$\sqrt{(-6/10)^2+(8/10)^2} = \sqrt{100/100} = 1$$

|v| = $\sqrt{4^2+5^2} = \sqrt{41}$

El vector unitario correspondiente a *v* será por lo tanto $(4/\sqrt{41}, 5/\sqrt{41})$

4) *Halla el ángulo que forman entre sí las siguientes parejas de vectores:*

Para hallar el ángulo entre dos vectores recurrimos a las siguiente expresión, que en realidad es la misma que la del ejercicio 2 solo que trabajando con dos vectores:

$$\cos\alpha = u \cdot v / |u| \cdot |v|$$

El numerador es el producto escalar de los dos vectores, mientras que el denominador es el producto de sus respectivos módulos.

a) cos α= $(-4,3)(5,5)$ / 5·5 = -5/25 = -1/5 → α = 101,54º

b) cos α= $(3,0)\cdot(-4,6)/3\cdot\sqrt{80}=-12/3\cdot\sqrt{80}=-4/\sqrt{80}$ → α = 116,57º

c) cos α= $(2,1)\cdot(-1,2)/\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}=0/5=0$ → α = 90º

5) Expresa en forma polar los vectores que aparecen en el ejercicio 1.

Expresar un vector en forma polar significa mostrar su módulo y el ángulo que forma con el eje OX. El ángulo se pone como un subíndice, de esta forma: $|v|_\alpha$

Ya hemos visto cómo se calcula el módulo, y el ángulo que nos interesa es el que podríamos sacar a partir del coseno director con el eje OX.

a) (3,-5)

$$\left.\begin{array}{l} \text{módulo} = \sqrt{34} \\ \cos\alpha = x/\sqrt{x^2+y^2} \quad \alpha = 59{,}04º \end{array}\right\} (3,-5) = \sqrt{34}_{\ 59{,}04º}$$

b) (-4,-12)

$$\left.\begin{array}{l} \text{módulo} = \sqrt{160} \\ \cos\alpha = -4/\sqrt{160} \quad \alpha = 108{,}43º \end{array}\right\} (-4,-12) = \sqrt{160}_{\ 108{,}43º}$$

c) (-5,6)

$$\left.\begin{array}{l} \text{módulo} = \sqrt{61} \\ \cos\alpha = -5/\sqrt{61} \quad \alpha = 1129{,}81º \end{array}\right\} (-5,6) = \sqrt{61}_{\ 129{,}81º}$$