

# Ejercicios resueltos de combinatoria

- 1) Al meter un CD con 11 temas de música en el ordenador, selecciono el modo de "reproducción aleatoria", de tal forma que el programa escoge al azar (sin que pueda haber repetición) el orden de los temas. ¿De cuántas formas se pueden escuchar las pistas? ¿Qué probabilidad hay de que mi tema favorito sea el último que suene?
- 2) En un terrario tengo 12 caracoles. Teniendo en cuenta que son hermafroditas pero sin posibilidad de autofecundación, ¿de cuántas maneras pueden aparearse?
- 3) ¿De cuántas formas pueden ordenarse veintidós alumnos en una clase sabiendo que hay 30 mesas en el aula?
- 4) En mi colección tengo 20 CDs de música, y quiero regalar 4 a un amigo ¿Cuántas posibilidades de regalo tengo?
- 5) Si se permitiese cualquier posibilidad, ¿de cuántas formas podrían ordenarse las 16 piezas que un jugador tiene en un tablero de ajedrez? (Sólo puede ocupar las dos primeras filas, claro).
- 6) Una persona lleva un paquete de 20 folios escritos. Se tropieza y las hojas se desordenan. Los amontona apresuradamente. ¿Cuál es la probabilidad de que los coloque correctamente?

## Soluciones

Un breve repaso preliminar: los ejercicios de combinatoria pueden ser de varios tipos:

- Variaciones: si importa el orden de colocación de elementos pero no se cogen todos.
- Variaciones con repetición: lo mismo, pero además pueden repetirse elementos.
- Permutaciones: si importa el orden y se cogen todos los elementos.
- Permutaciones con repetición: lo mismo, pero algunos elementos están repetidos.
- Combinaciones: si no importa el orden de los elementos.

Aunque aquí pondremos las fórmulas de cada uno de los casos que salgan en los ejercicios, conviene que las repases y las tengas frescas antes de intentar resolverlos. Visto esto, vamos a ello.

*1) Al meter un CD con 11 temas de música en el ordenador, selecciono el modo de "reproducción aleatoria", de tal forma que el programa escoge al azar (sin que pueda haber repetición) el orden de los temas. ¿De cuántas formas se pueden escuchar las pistas? ¿Qué probabilidad hay de que mi tema favorito sea el último que suene?*

Recuerda que en los problemas de combinatoria las tres preguntas clave son: ¿importa el orden?, ¿cogemos todos los elementos? y ¿se pueden repetir elementos?

En este caso: importa el orden, se escogen todos los elementos (se escuchan todos los temas cada vez) y no hay repeticiones (lo especifica el enunciado). Por lo tanto, estamos ante un caso de permutaciones:

$$P_{11} = 11! = 39916800$$

Lo segundo que nos pregunta es la probabilidad de que uno en concreto de los 11 temas sea el último. No vale quejarse de que estos son ejercicios de combinatoria, no de probabilidad, porque ambas ramas están muy relacionadas, y a menudo hace falta algo de combinatoria para resolver probabilidad.

De todas formas, tampoco es que sea una pregunta difícil. Es pura ley de Laplace: "casos favorables partido de casos posibles". Los casos posibles ya los acabamos de calcular (11!). ¿Cuántas combinaciones hay si reservamos el último puesto para ese tema que tanto nos gusta? Pues todas las permutaciones de los 10 restantes:

$$10! = 3628800$$

$$p(\text{tema favorito en último lugar}) = 3628800/39916800 = 0,09$$

## Cajón de Ciencias

2) En un terrario tengo 12 caracoles. Teniendo en cuenta que son hermafroditas pero sin posibilidad de autofecundación, ¿de cuántas maneras pueden aparearse?

Vamos con las preguntas de rigor:

¿Importa el orden? No. Si no lo ves claro, piensa lo siguiente: si el caracol A se junta con el caracol B ¿es un caso distinto a que B se junte con A?

¿Se cogen todos los elementos? Sí. Se supone que todos los caracoles entran en el juego.

¿Puede haber repeticiones? En este caso, eso significa ¿puede un caracol aparearse consigo mismo? El enunciado especifica que no (y así ocurre en la realidad, por cierto).

Por lo tanto, es un caso de combinaciones.

$$C_{12,2} = \binom{12}{2} = 12!/(2! \cdot 10!) = 66 \text{ formas posibles de aparearse}$$

3) ¿De cuántas formas pueden ordenarse veintidós alumnos en una clase sabiendo que hay 30 mesas en el aula?

En este caso, importa el orden (cualquier profesor puede apreciar la diferencia entre tener a los alumnos bullangueros al fondo de la clase o en primera fila). No puede haber repeticiones, por lo que es un caso de variaciones sin repetición:  $V_{30,22}$ .

Los avispados se habrán dado cuenta de que calcular esto a pelo ( $30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot \dots \cdot 10 \cdot 9$ ) es una proeza heroica. Pero afortunadamente, con un poco de ingenio se puede hacer todo de manera más sencilla.

Simplemente calculamos  $30!$  y luego lo dividimos entre  $8!$  (fíjate que si al paréntesis del párrafo anterior lo multiplicamos por  $8!$  tenemos el  $30!$  completo) para descartar los últimos números. Ambos números se sacan en un instante con la calculadora:

$$30! / 8! = 6578691959627754430464000000 \text{ formas posibles}$$

De hecho, en algunos libros de texto puede encontrarse la fórmula  $V_{m,n} = m!/n!$  como alternativa a la que hemos visto para calcular variaciones sin repetición. Las dos son válidas, elige la que más te guste<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Como siempre, los que sepan manejar las dos tendrán un poco más de ventaja...

## Cajón de Ciencias

4) En mi colección tengo 20 CDs de música, y quiero regalar 4 a un amigo ¿Cuántas posibilidades de regalo tengo?

Ahora no importa el orden, porque a mi amigo no le interesa si el CD A lo escogí antes o después que el B, el C, o el D. No hay repeticiones, pero de todas formas, con saber que no importa el orden, tenemos seguro que es un caso de combinaciones.

$$C_{20,4} = \binom{20}{4} = 20! / (4! \cdot 16!) = 4845 \text{ posibilidades}$$

5) Si se permitiese cualquier posibilidad, ¿de cuántas formas podrían ordenarse las 16 piezas que un jugador tiene en un tablero de ajedrez? (Sólo puede ocupar las dos primeras filas, claro).

Ahora importa el orden, se cogen todos los elementos y puede haber repeticiones (a efectos prácticos, todos los peones son iguales, así como las dos torres, los dos alfiles y los dos caballos). Por lo tanto, estamos ante permutaciones con repetición. La fórmula en estos casos es:

$$PR_{16}^{2,2,2,8} = 16! / (2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 8!)$$

¿Confuso? Veámoslo con atención, que en el fondo no es tan complicado. El subíndice de las permutaciones con repetición (el número 16, en nuestro ejemplo) es el número total de elementos que tenemos que ordenar (16 piezas de ajedrez). Los superíndices (los tres doses y el ocho) son las repeticiones que podemos encontrar (2 torres, 2 caballos, 2 alfiles y 8 peones). Lo que hay que calcular es el factorial del subíndice y dividirlo entre el producto de los factoriales de los superíndices.

$$PR_{16}^{2,2,2,8} = 16! / (2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 8!) = 20922789888000 / (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 40320) = 64864800 \text{ formas posibles}$$

6) Una persona lleva un paquete de 20 folios escritos. Se tropieza y las hojas se desordenan. Los amontona apresuradamente. ¿Cuál es la probabilidad de que los coloque correctamente?

¡De nuevo un problema de probabilidad en un apartado de combinatoria! Pero a estas alturas eso no nos importa ni nos sorprende en absoluto.

Está claro que sólo hay un caso favorable: los 20 folios perfectamente ordenados. Para ver los casos posibles recurrimos a la combinatoria ¿De cuántas formas posibles se pueden ordenar las 20 páginas? Bueno, no hace falta decir que importa el orden; además, se cogen todos los elementos y no puede haber repeticiones. Por lo tanto, se trata de permutaciones.

$$P(\text{todos los folios ordenados}) = 1/20! = 1/2432902008176640000$$