Combinatoria: Permutaciones

"Combinatoria" es la parte de las matemáticas que sirve para calcular de cuántas maneras se pueden ordenar un grupo de elementos. Hay distintas posibilidades, dependiendo de si podemos repetir algunos, de si importa el orden en el que los vayamos eligiendo o si cogemos todos los elementos de un grupo o sólo algunos. No es una parte difícil de las matemáticas; lo único que suele dar dificultades es entender qué tipo de ordenación nos está pidiendo un ejercicio. Pero vayamos por partes...

Permutaciones

Tendremos que calcular permutaciones cuando partamos de un conjunto de x elementos y nos pidan de cuántas formas pueden ordenarse todos ellos. Estos son los dos puntos clave para distinguir un problema de permutaciones: importa el orden y trabajamos con todos los elementos. Vamos con un ejemplo:

Ejemplo: cinco personas deciden descansar de su paseo sentándose en un banco. ¿De cuántas formas distintas pueden colocarse?

Primero: ¿Cómo sabemos que es un problema de permutaciones? Porque tenemos 5 elementos, tenemos que ordenarlos todos y nos importa el orden en que lo hagan. Si a las personas las llamamos A, B, C, D y E, no es lo mismo que se sienten en el orden ABCDE que DCBAE.

Hay una fórmula para calcular esto, pero la veremos después. Ahora vamos a intentar pensar, y llegaremos curiosamente (pero por nuestros propios medios) al mismo resultado. Si llamamos 1, 2, 3, 4 y 5 a los cinco sitios del banco, ¿cuántas personas distintas pueden sentarse en "1"? Cinco. Y una vez que se siente el primero ¿cuántos distintos pueden hacerlo en "2"? Cuatro. Y así sucesivamente: tres en el tercer sitio, dos en el cuarto, y uno en el quinto. Es decir, el número de posibilidades sería:

$$5·4·3·2·1 = 120 \text{ formas posibles}$$

Se trata de multiplicar un número por una serie de términos en los que se va restando uno, hasta llegar a la unidad. En lenguaje matemático se expresa así:

$$P_n = n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$$

(El simbolito de exclamación se lee "factorial" y describe esta operación. Lo tienes en la calculadora si ésta es científica, En alguna tecla aparecerá *x!*).

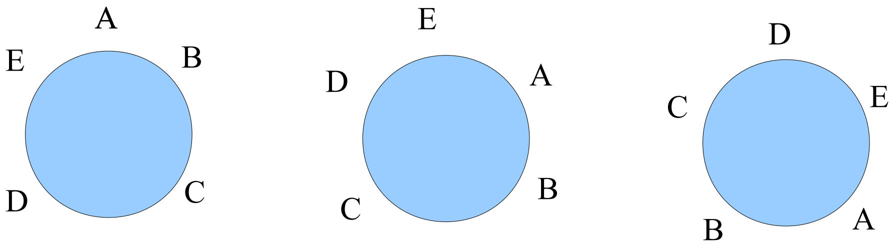
Permutaciones "de mesa redonda".

Imagina el siguiente problema:

Las mismas cinco personas de antes van a un restaurante y se tienen que sentar en torno a una mesa redonda ¿De cuántas formas posibles se pueden colocar?

Lo primero, localizar de qué tipo es el problema. Está claro que se trata de permutaciones, porque tenemos que ordenar todos los elementos de un conjunto. Pero ¿es este problema igual que el anterior?

Seguramente habrás pensado "no, porque si no no lo pondrían en un apartado distinto". Vale, es verdad, pero ¿podemos dar una respuesta más *científica*? Fíjate en las siguientes colocaciones:



¿Son posibilidades distintas? A primera vista, podría parecerlo. Pero en todas ellas, A tiene a E sentado a su izquierda, y B a su derecha. Y pasa lo mismo con todos los comensales. Es como si los cinco se hubiesen desplazado un asiento en sentido de las agujas del reloj, pero al final la colocación es la misma[1]. Y como hay cinco sillas, hay cinco posiciones repetidas. O lo que es lo mismo, para estos casos se calcularían las permutaciones de *n* elementos y se dividiría el resultado entre *n* (que es lo mismo que calcular *(n-1)!*)

Por cierto, da igual que las mesas sean redondas o no. Lo que importa es que, a la hora de ordenar los elementos, el primero se "toca" con el último.

---

[1] Este tipo de problemas da por sentado que todos los asientos son iguales. Si al que se coloca en la silla de más arriba le toca pagar, la cosa cambia.

Permutaciones con repetición

Este es un caso un poco más complejo de ver, y que no siempre se ve en los libros de texto. Si no lo tratáis en clase, no hace falta que leas este apartado (a no ser que te pique la curiosidad).

Imagina que tenemos un grupo de 8 personas que tenemos que ordenar en un banco, de las cuales dos son niños, 4 son mujeres y 2 son hombres. Ahora no nos estamos fijando en cada persona en particular, sino en el "tipo" al que pertenece. A efectos prácticos, los dos niños son iguales entre sí, y lo mismo ocurre con las mujeres y los hombres. Colocar al primer hombre en un extremo del banco y al segundo en el otro extremo es lo mismo que si intercambiáramos sus puestos. La fórmula para resolverlo es:

$$P_8^{2,4,2} = 8!/(2!\cdot 4!\cdot 2!)$$

¿Confuso? Veamos la explicación. Para empezar, vamos a imaginar que los ocho elementos son todos distintos, en cuyo caso se calcularía como una permutación normal:

$$\{n_1, n_2, m_1, m_2, m_3, m_4, h_1, h_2\} \rightarrow P_8$$

Las "n" son los niños, las "m" las mujeres y las "h" los hombres. Mientras tengan el número en el subíndice, los elementos son diferentes. Siendo así, la anterior podría ser una ordenación posible, y sería distinta de la siguiente:

$$\{n_1, n_2, m_1, m_3, m_2, m_4, h_1, h_2\}$$

Pero si quitáramos los subíndices y todas las "m" fueran iguales entre sí, ambas ordenaciones serían iguales. Por cada ordenación posible cuando las "m" son distintas, tendríamos un cierto número de ordenaciones "repes" cuando las "m" son todas iguales. ¿De cuántas formas se pueden ordenar las "m" cuando tenemos m_1, m_2, m_3 y m_4? Si has respondido que 4! porque son permutaciones, es que has estado atento en clase. Para corregir esas repeticiones, dividimos las permutaciones de 8 (8!) entre 4! Y lo mismo hacemos con cada elemento del grupo que se repita varias veces.

$$P_m^{a,b,c} = m!/(a!\cdot b!\cdot c!)$$

En resumen, *m* es el número total de elementos, y *a, b, c...* las veces que se repiten algunos de ellos (no todos tienen por qué repetirse, pero la suma de *a* + *b* + *c*... nunca puede ser mayor que *m*).

Por si no te habías dado cuenta...

Si sabes cómo se calculan las variaciones, a lo mejor has caído en el detalle. Si tenemos que hallar, pongamos de ejemplo, variaciones de 5 elementos tomados de 3 en 3, sería:

$$V_{5,3} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

¿Qué pasa si tuviéramos que calcular variaciones de 5 elementos tomados de 5 en 5?

$$V_{5,5} = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

¡Es lo mismo que P_5! Si te confundes entre variaciones y permutaciones, no te preocupes ¡porque las permutaciones no son más que un tipo de variaciones! En efecto, una permutación no es más que una variación en la que, por casualidad, cogemos todos los términos en lugar de sólo unos pocos. Si no hemos mencionado nada sobre permutaciones con repetición es porque tienen exactamente la misma fórmula que las variaciones con repetición:

$$VR_{m,n} = PR_{m,n} = m^n$$

Ahora te recomendamos que eches también un vistazo a las variaciones y las combinaciones, si no lo has hecho ya, para ver toda la combinatoria en conjunto.